Cours 3^{e}

2006-2007

Table des matières

Chapitre 1

Égalités Remarquables

Sommaire

Programme 2004

Écriture littérale ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$. Connaître les égalités : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2=(100+1)^2=100^2+200+1$, $(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2$ $=(x+5+2)(x+5-2)$.	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : - utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; - utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

I. Rappels

Définition :
Développer une expression, c'est transformer les produits en sommes.
Simple distributivité : Soit a, b, k trois nombres quelconques. alors

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

Double distributivité : Soit a, b, c, d 4 nombres quelconques. Alors

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exercices : 1 page 15 ; 5 et 6 page 16.

II. Égalités remarquables

Activité 1 : feuille 1

Carré d'une somme de deux termes

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} + \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Carré d'une différence de deux termes

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} - \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Produit de la somme de deux termes par leur différence

$$(a+b)(a-b) = \underbrace{a^2}_{\text{carré du } 1^{\text{er}}\text{terme}} - \underbrace{b^2}_{\text{carré du } 2^{\text{e}}\text{terme}}$$

Attention :
$(2x)^2 = 2x \times 2x = 4x^2 \neq 2x^2$

Exemples :
$(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

Application : Calcul mental
$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$
$51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 = 2500 + 100 + 1 = 2601$
$37 \times 43 = (40-3) \times (40+3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$

Exercices : 9, 10, 13, 17, 18, 19, 20 et 23 page 17 ; 24, 25 et 28 page 18.

III. Factorisation

Définition :
Factoriser, c'est transformer une somme (ou une différence) en produit.
Exemple : $7(x+5)$ est une expression factorisée alors que $x+4$ ou $5x(2x+8)+4$ ne sont pas des expressions factorisées.

1) Avec un facteur commun

Activité : 1. feuille 2

Soit a, b, k 3 expressions quelconques. Alors

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$
$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

Exemples : Factoriser

$$A = \underline{(x+2)}(2x-1) + \underline{(x+2)}x$$
$$A = (x+2) \times (2x-1+x)$$
$$A = (x+2) \times (3x-1)$$

$$B = (4x+3)\underline{(x-1)} - (4x-2)\underline{(x-1)}$$
$$B = (x-1)(4x+3-(4x-2))$$
$$B = (x-1)(4x+3-4x+2)$$
$$B = (x-1) \times 5 = 5(x-1)$$

Exercices : 32, 33, 34, 35 page 18, 36, 38, 39 et 40 page 19.

2) Avec une égalité remarquable

Activité : 2. feuille 2

Soit a, b deux expressions quelconques. Alors

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

Exemples : Factoriser

$$A = x^2 + 16x + 64$$
$$A = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2$$
$$A = (x+8)^2$$

$$B = 4x^2 - 4x + 1$$
$$B = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2$$
$$B = (2x-1)^2$$

$$C = x^2 - 25$$
$$C = x^2 - 5^2$$
$$C = (x+5)(x-5)$$

Exercices : 41, 42, 43, 44 et 47 page 19, 59 page 21, 72 page 22 et 75 page 23.

IV. Équation produit

Activité :

1. On sait que si l'on multiplie n'importe quel nombre x par 0 alors on obtient 0.

$$0 \times x = 0$$

   Que peut-on alors dire des expressions A et B dans le produit $A \times B = 0$?

2. Comment peut-on alors résoudre l'équation $(x+3) \times (2x-5) = 0$?

• Dans un produit, si l'un **au moins** des facteurs est nul alors le produit est nul.

Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $a \times b = 0$

• Si un produit est nul alors l'un **au moins** de ses facteurs est nul.

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Exemple : Résoudre l'équation $(3x+7)(-8x-4) = 0$ C'est une équation produit alors :

$$\begin{array}{rcr} 3x - 7 = 0 & \text{ou} & -8x - 4 = 0 \\ 3x = 7 & \text{ou} & -8x = 4 \\ x = \dfrac{7}{3} & \text{ou} & x = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Les solutions de l'équation $(3x-7)(-8x-4) = 0$ sont $\dfrac{7}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$

Exercices : 12, 13, 14, 15 et 16 page 37 ; 69 page 22.

I Rappels

☐ ☐ **1 p 15**
☐ ☐ **5 p 16**
☐ ☐ **6 p 16**

II Égalités remarquables

☐ ☐ 9 p 17
☐ ☐ 10 p 17
☐ ☐ 17 p 17
☐ ☐ 18 p 17
☐ ☐ 19 p 17
☐ ☐ 20 p 17
☐ ☐ 13 p 17
☐ ☐ 23 p 17
☐ ☐ 24 p 18
☐ ☐ 25 p 18
☐ ☐ 28 p 15

III Factorisation

1) Avec facteurs communs

☐ ☐ 32 p 18
☐ ☐ 33 p 18
☐ ☐ 34 p 18
☐ ☐ 35 p 18
☐ ☐ 36 p 18
☐ ☐ 38 p 18
☐ ☐ 39 p 18
☐ ☐ 40 p 18

2) Avec une égalité remarquable

☐ ☐ 41 p 19
☐ ☐ 42 p 19
☐ ☐ 43 p 19
☐ ☐ 44 p 19
☐ ☐ 47 p 19
☐ ☐ 59 p 21
☐ ☐ 72 p 22
☐ ☐ 75 p 23

IV Équation produit

☐ ☐ 12 p 37

Devoir maison

☐ ☐ 64 p 22
☐ ☐ 78 p 24

I Rappels

☐ ☐ **1 p 15**
☐ ☐ **5 p 16**
☐ ☐ **6 p 16**

II Égalités remarquables

☐ ☐ 9 p 17
☐ ☐ 10 p 17
☐ ☐ 17 p 17
☐ ☐ 18 p 17
☐ ☐ 19 p 17
☐ ☐ 20 p 17
☐ ☐ 13 p 17
☐ ☐ 23 p 17
☐ ☐ 24 p 18
☐ ☐ 25 p 18
☐ ☐ 28 p 15

III Factorisation

1) Avec facteurs communs

☐ ☐ 32 p 18
☐ ☐ 33 p 18
☐ ☐ 34 p 18
☐ ☐ 35 p 18
☐ ☐ 36 p 18
☐ ☐ 38 p 18
☐ ☐ 39 p 18
☐ ☐ 40 p 18

2) Avec une égalité remarquable

☐ ☐ 41 p 19
☐ ☐ 42 p 19
☐ ☐ 43 p 19
☐ ☐ 44 p 19
☐ ☐ 47 p 19
☐ ☐ 59 p 21
☐ ☐ 72 p 22
☐ ☐ 75 p 23

IV Équation produit

☐ ☐ 12 p 37

Devoir maison

☐ ☐ 64 p 22
☐ ☐ 78 p 24

I Rappels

☐ ☐ **1 p 15**
☐ ☐ **5 p 16**
☐ ☐ **6 p 16**

II Égalités remarquables

☐ ☐ 9 p 17
☐ ☐ 10 p 17
☐ ☐ 17 p 17
☐ ☐ 18 p 17
☐ ☐ 19 p 17
☐ ☐ 20 p 17
☐ ☐ 13 p 17
☐ ☐ 23 p 17
☐ ☐ 24 p 18
☐ ☐ 25 p 18
☐ ☐ 28 p 15

III Factorisation

1) Avec facteurs communs

☐ ☐ 32 p 18
☐ ☐ 33 p 18
☐ ☐ 34 p 18
☐ ☐ 35 p 18
☐ ☐ 36 p 18
☐ ☐ 38 p 18
☐ ☐ 39 p 18
☐ ☐ 40 p 18

2) Avec une égalité remarquable

☐ ☐ 41 p 19
☐ ☐ 42 p 19
☐ ☐ 43 p 19
☐ ☐ 44 p 19
☐ ☐ 47 p 19
☐ ☐ 59 p 21
☐ ☐ 72 p 22
☐ ☐ 75 p 23

IV Équation produit

☐ ☐ 12 p 37

Devoir maison

☐ ☐ 64 p 22
☐ ☐ 78 p 24

I Rappels

☐ ☐ **1 p 15**
☐ ☐ **5 p 16**
☐ ☐ **6 p 16**

II Égalités remarquables

☐ ☐ 9 p 17
☐ ☐ 10 p 17
☐ ☐ 17 p 17
☐ ☐ 18 p 17
☐ ☐ 19 p 17
☐ ☐ 20 p 17
☐ ☐ 13 p 17
☐ ☐ 23 p 17
☐ ☐ 24 p 18
☐ ☐ 25 p 18
☐ ☐ 28 p 15

III Factorisation

1) Avec facteurs communs

☐ ☐ 32 p 18
☐ ☐ 33 p 18
☐ ☐ 34 p 18
☐ ☐ 35 p 18
☐ ☐ 36 p 18
☐ ☐ 38 p 18
☐ ☐ 39 p 18
☐ ☐ 40 p 18

2) Avec une égalité remarquable

☐ ☐ 41 p 19
☐ ☐ 42 p 19
☐ ☐ 43 p 19
☐ ☐ 44 p 19
☐ ☐ 47 p 19
☐ ☐ 59 p 21
☐ ☐ 72 p 22
☐ ☐ 75 p 23

IV Équation produit

☐ ☐ 12 p 37

Devoir maison

☐ ☐ 64 p 22
☐ ☐ 78 p 24

Activité 1 : égalités remarquables

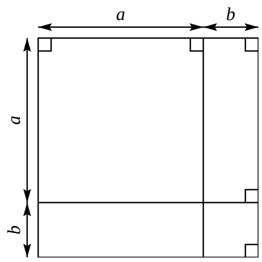
1. Pour chacune des expressions suivantes, complète et indique le développement juste.

$$3(x+2) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$5(2x-1) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$(x+1)(y+5) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(x+1)(y+5) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

2.



De combien de pièces est formé le grand carré ? ....
Exprime de 2 façons différentes l'aire de ce grand carré :
1re façon..
2e façon ....
Donc $(a+b)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$
Pour être sûre du résultat, Emilie développe l'expression $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$
$$(a+b)^2 = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$$

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots \qquad (1)$$

3. Développe l'expression $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a-b)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a-b)^2 = \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$(a-b)^2 = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots \qquad (2)$$

4. Développe $(a+b)(a-b)$

$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots - \ldots\ldots \qquad (3)$$

5. Recopie les égalités $(1), (2)$ et (3).

....

....

....

Ces 3 égalités sont appelées Egalités Remarquables

Activité 2 : Factorisation

1. (a) Complète l'encadré ci-dessous.

Si a, b, k sont 3 expressions quelconques alors

$$\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots = k \times (a+b)$$
$$\ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots = k \times (a-b)$$

(b) Transforme les sommes suivantes en produit et cite les facteurs du produit.

Somme	k	a	b	Produit	Facteurs
$8x+4x$				$8x+4x = \ldots \times (\ldots + \ldots) = \ldots$	
$-3x-yx$				$-3x-yx = \ldots \times (\ldots - \ldots)$	
$x^2+2x = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$				$x^2+2x = \ldots \times (\ldots + \ldots)$	
$2(x+2)-x(x+2)$				$2(x+2)-x(x+2) = (\ldots + \ldots) \times (\ldots \quad \ldots)$	
$(x+3)(x-1)+7(x+3)$				$(x+3)(x-1)+7(x+3) = (\ldots \quad \ldots) \times (\ldots \quad \ldots \quad \ldots)$	

2. (a) Rappelle les 3 égalités remarquables.

$$\ldots + \ldots \times \ldots \times \ldots + \ldots = (a+b)^2 \qquad (1) \qquad \ldots - \ldots \times \ldots \times \ldots + \ldots = (a-b)^2 \qquad (2) \qquad \ldots - \ldots = (a+b)(a-b) \qquad (3)$$

(b) Complète les sommes et transforme les en produits puis cite les facteurs du produit

Somme	Type	a	b	Produit	Facteurs
$x^2+2\times\ldots\times\ldots+3^2$				$x^2+2\times\ldots\times\ldots+3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	
$9-x^2 = (\ldots)^2 - x^2$				$9-x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
$x^2-2\times x\times\ldots+49 = x^2-2\times x\times\ldots+(\ldots)^2$				$x^2-2\times x\times\ldots+49 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	
$x^2+2\times x\times 4+\ldots$				$x^2+2\times x\times 4+\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$	
$(4x)^2-2\times\ldots\times\ldots+5^2$				$(4x)^2-2\times\ldots\times\ldots+5^2 = \ldots\ldots\ldots$	
$4x^2-36 = (\ldots)^2-(\ldots)^2$				$4x^2-36 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
$25x^2+80x+64 = (\ldots)^2+2\times\ldots\times\ldots+(\ldots)^2$				$25x^2+80x+64 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	

Exercice 1

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 1^{re} égalité remarquable.

$$A=(x+2)^2 \quad B=(x+5)^2 \quad C=(7+x)^2$$
$$D=(2x+3)^2 \quad E=(3x+1)^2 \quad F=(4x+2)^2$$

Exercice 2

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 2^{e} égalité remarquable.

$$G=(x-1)^2 \quad H=(x-2)^2 \quad I=(5-x)^2$$
$$J=(2x-1)^2 \quad K=(5-3x)^2 \quad L=(2x-5)^2$$

Exercice 3

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 3^{e} égalité remarquable.

$$M=(x-1)(x+1) \quad N=(x-2)(x+2)$$
$$O=(x+3)(x-3) \quad P=(2x-3)(2x+3)$$
$$Q=(2-3x)(2+3x) \quad R=(1-4x)(1+4x)$$

Exercice 4

Développe les expressions suivantes :

$$S=(x+4)(x-4) \quad T=(3+x)^2$$
$$U=(x-3)^2 \quad V=(2x+5)^2$$
$$W=(3-4x)(3+4x) \quad X=(4-3x)^2$$
$$Y=(2x-7)^2 \quad Z=(5+5x)^2$$
$$A_1=(x+5)(x-5) \quad B_1=(3x+4)^2$$
$$C_1=(6x-2)^2 \quad D_1=(3x-2)(3x+2)$$
$$E_1=(2+6x)^2 \quad F_1=(2x-5)^2$$

Exercice 5

Développe les expressions suivantes :

$$A=(x+2)^2+(x-3)^2 \quad B=(2x+1)^2+(x+1)(x+2) \quad C=(2-x)^2+(x-1)(x+1)$$
$$D=(3x-2)^2+(3x+2)^2 \quad E=(2x+3)(2x-3)+(3x-2)(3x+2)$$

Exercice 6

En faisant attention au signe −, développe les expressions suivantes :

$$F=(x+1)^2-(x-2)^2 \quad G=(x-3)^2-(x+2)(x-2) \quad H=(3x+2)^2-(2x+3)^2$$
$$I=(2-5x)^2-(5x+2)^2 \quad J=(x+3)(x-3)-(2x+1)(2x-1)$$

Exercice 7

Développe les expressions suivantes :

$$K=(2x+1)^2-(x+2)^2 \quad L=(3x+2)(3x-2)+(2x-3)^2$$
$$M=(2x-1)(2x+2)+(3x-5)^2 \quad N=(2x-1)(2x+1)+(5x+3)^2$$
$$O=(3+x)(3-x)-(3-2x)(3+2x) \quad P=(2x-7)^2+(3x-6)^2$$
$$Q=(7-x)(8+x)-(8-x)(7+x) \quad R=(2x+3)^2+(2x+4)^2$$
$$S=(3-2x)^2-(3-2x)(3+2x)$$

Exercice 8

Factorise les expressions suivantes à l'aide du tableau ci-dessous.

Expression $k \times a + k \times b$	Factorisation $k \times (a+b)$
$(2x+3)\boxed{(2x-1)} + (2x+3)\boxed{(3x+2)}$	$(2x+3) \times \big[(2x-1) + (3x+2)\big]$

facteur commun

$$\begin{array}{ll} A = (x+1)(x+2) + (x+1)(2x-3) & B = (3x-1)(x+2) + (3x-1)(3x+1) \\ C = (1-2x)(2x+3) + (1-2x)(3x+2) & D = (2x+3)(2x-3) - (4-5x)(5x-4) \\ E = (3x+1)(x+3) - (3x+1)(2x-1) & F = (2x+3)(2x-1) - (3x+4)(2x-1) \end{array}$$

Exercice 9

Transforme l'écriture des expressions suivantes pour faire apparaître un facteur commun et ensuite, factorise l'expression obtenue.

$$\begin{array}{ll} K = (x+3)^2 - (x+2)(x+3) & L = (2x+1)^2 + (2x+1)(3x-1) \\ M = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)^2 & N = (2x+3)^2 + (3x-2)(2x+3) \\ O = (2-4x)^2 - (2+4x)(2-4x) & P = (x-3)(2x+3) - (x-3)^2 \\ Q = (2x+1)(2x-1) + (2x-1)^2 & \end{array}$$

Exercice 10

Factorise les expressions suivantes à l'aide de la 3^{e} égalité remarquable.

$$\begin{array}{ll} G = (2x+1)^2 - (x+2)^2 & H = (x+2)^2 - (3x+2)^2 \\ I = (3x-1)^2 - (2x+3)^2 & J = (1-5x)^2 - (2-3x)^2 \end{array}$$

Exercice 11

Démontre la propriété suivante :

> Si , au produit de 3 nombres consécutifs, on ajoute le nombre « du milieu » alors on obtient le cube du nombre « du milieu ».

Exercice 12

Deux nombres r et s sont tels que $r^2 + s^2 = 208$ et $r \times s = 58$.
Calculer $r + s$.

Exercice 13

Soit l'expression $A = (2x+5)(x-3) + (x-5)^2 - 2(2x-1)(x+1)$

1. Développe et réduis l'expression A.
2. Calcule la valeur de l'expression A pour $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 14

1. (a) Développe et réduis $F = (x+3)^2 - (2x+1)(x+3)$.
   (b) Factorise l'expression F.

(c) Calcule la valeur de l'expression F pour $x = -1$.

2. (a) Développe et réduis l'expression $G = (x-7)^2 - 81$.

   (b) Factorise l'expression G.

3. (a) Développe et réduis l'expression $H = (3x+5)(2x-1) + 9x^2 - 25$.

   (b) Factorise $9x^2 - 25$, puis l'expression H.

   (c) Calcule H pour $x = -\dfrac{5}{3}$.

4. Factorise l'expression $I = 4x^2 + 64x - 65$.

Exercice 15

Soit l'expression $C = (3x-1)^2 - 4x(3x-1)$.

1. Développe et réduis C.
2. Calcule C pour $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 16

Soit l'expression $G = (-3x+10)(2x+7) - (-3x+10)(-5x+1)$.

1. Développe et réduis l'expression G.
2. Ecris G sous la forme d'un produit de 2 facteurs du 1$^{\text{er}}$ degré.
3. Résous l'équation $G = 0$.

Exercice 17

Soit l'expression $F = (3x-8)(x+1) - 9x^2 + 64$.

1. Développe et réduis l'expression F.
2. Factorise l'expression $9x^2 - 64$.
3. Factorise l'expression F.
4. Résous l'équation $F = 0$.

Exercice 18

Soit $A = (1-2x)^2 - (x+1)(3x-4)$.

1. Développe et réduis l'expression A.
2. Calcule A pour $x = -2$.
3. Est-ce que -1 est solution de l'équation $A = 0$?

Exercice 19

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

Soit x un nombre positif et ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 9x + 6$ et $AC = 12x + 8$.

1. Exprime, en fonction de x, la longueur du segment $[BC]$.
2. Exprime, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.
3. Calcule, en centimètres carrés, la valeur exacte de cette aire lorsque $x = \sqrt{3}\,cm$.
4. Le triangle ABC peut-il être isocèle ? Pourquoi ?

Exercice 20

On donne $A = 2(x+5)(2x-3) - (2x+5)^2$.

1. Développe et réduis A.
2. Calcule A pour $x = 1$.

3. Résous l'équation $A = 5$.

Exercice 21

1. (a) Développe $(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$.
   (b) Exprime le nombre 111 111 sous la forme d'une somme de puissances de 10.
   (c) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 111 111.
2. (a) Développe $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + 1)$.
   (b) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 11 111 111.
3. (a) Développe $(x^2 - x + 1)(x + 1)$.
   (b) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 1 001.
4. En développant
$$(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$$
trouve deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 100 001.

Exercice 22

1. Vérifie que pour tous nombres b et c :
$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = 2(b^2 + c^2)$$
2. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC + AB = 14\,cm$ et $AC - AB = 2\,cm$.
Sans calculer AC et AB, déduis de la question précédente la longueur BC.

Exercice 23

Démontre que les affirmations suivantes, données par Viète[1], sont toujours vraies :
- « Le carré de la différence de deux nombres, ajouté à quatre fois leur produit, est égal au carré de leur somme ».
- « Le double de la somme des carrés de deux nombres, diminué du carré de la somme de ces deux nombres, est égal au carré de leur différence ».
- « Lorsque l'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence ».

Exercice 24

Développe les expressions suivantes :

$$A = (x + 2) \times (x + 3) \quad B = (2x + 1) \times (-x + 3) \quad C = (x + 3)^2$$

$$D = (5 - x)^2 \quad E = (x - 6) \times (x + 6) \quad F = 2x + 3 + (2x - 1)^2$$

Exercice 25

On donne $A = (2x - 4)(2x + 3) - (2x + 5)^2$.
1. Développe et réduis A.
2. Calcule A pour $x = 1$.
3. Résous l'équation $A = 7$.

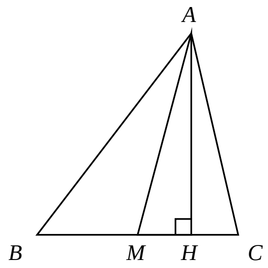
Exercice 26

On considère l'expression $A = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 2)$.

[1] Qui est-il ?

1. Développe et réduis l'expression A.
2. Calcule la valeur de l'expression A pour $x = 2$.
3. Résous l'équation $A = 2x^2$.

Exercice 27



Dans le triangle ci-contre, la droite (AM) est une médiane et la droite (AH) est une hauteur. Les points B, M, H et C sont alignés.
L'unité de longueur étant le centimètre, on pose

$$BM = CM = 3,\ AH = 2 \text{ et } MH = x$$

1. Exprime AB^2, AC^2, et AM^2 en fonction de x.
2. (a) Exprime $AB^2 + AC^2$ en fonction de x.
   (b) Exprime $2AM^2 + \dfrac{1}{2}BC^2$ en fonction de x.
   (c) Que peut-on dire de ces deux expressions ?

Exercice 28

On pose $B = 4x^2 - 25 - (2x + 5)(3x - 7)$.

1. Développe et réduis B.
2. (a) Factorise $4x^2 - 25$.
   (b) Déduis-en une factorisation de B.

Exercice 29

Soit l'expression $A = (2x + 3)^2 - (4x - 5)^2$.

1. Développe et réduis l'expression A.
2. Détermine la valeur de A pour $x = -1$ puis pour $x = \sqrt{2}$.
3. Factorise l'expression A.
4. Résous l'équation $A = 0$.

Exercice 30

1. On considère l'expression
$$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$$
   (a) Développe et réduis E.
   (b) Comment peut-on en déduire, sans calculatrice, le résultat de
$$99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$$
2. (a) Factorise l'expression
$$F = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(7x - 6)$$
   (b) Résous l'équation $(4x + 1)(7 - 3x) = 0$.

Exercice 31

Soit D et E les expressions suivantes :

$$D = (4x + 1)(x - 3) - (x - 3)^2 \qquad\qquad E = (3x + 9)^2 - 15$$

1. Développe et réduis les expressions D et E.
2. Factorise les expressions D et F.

3. Résous l'équation $D = E$.

Exercice 32

1. Soit l'expression $A = (3x - 4)^2 - (3x - 4)(2x + 5)$.
   (a) Développe et réduis l'expression A.
   (b) Factorise l'expression A.
   (c) Résous l'équation $A = 0$.
   (d) Calcule la valeur de l'expression A pour $x = 9$.

Chapitre 2

Théorème de Thalès et sa réciproque

Sommaire

Programme 2004

<table>
<tr>
<td>Propriété de Thalès</td>
<td>Connaître et utiliser dans une situation donnée les deux théorèmes suivants :
- Soient d et d' deux droites sécantes en A.
Soient B et M deux points de d, distincts de A.
Soient C et N deux points de d', distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$
- Soient d et d' deux droites sécantes en A.
Soient B et M deux points de d, distincts de A.
Soient C et N deux points de d', distincts de A.
Si
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$
et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.</td>
<td>Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en classe de quatrième.
L'étude de la propriété de Thalès est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et de l'espace. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite.
L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports.

Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative de ces points sur la droite. On s'interessera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.</td>
</tr>
</table>

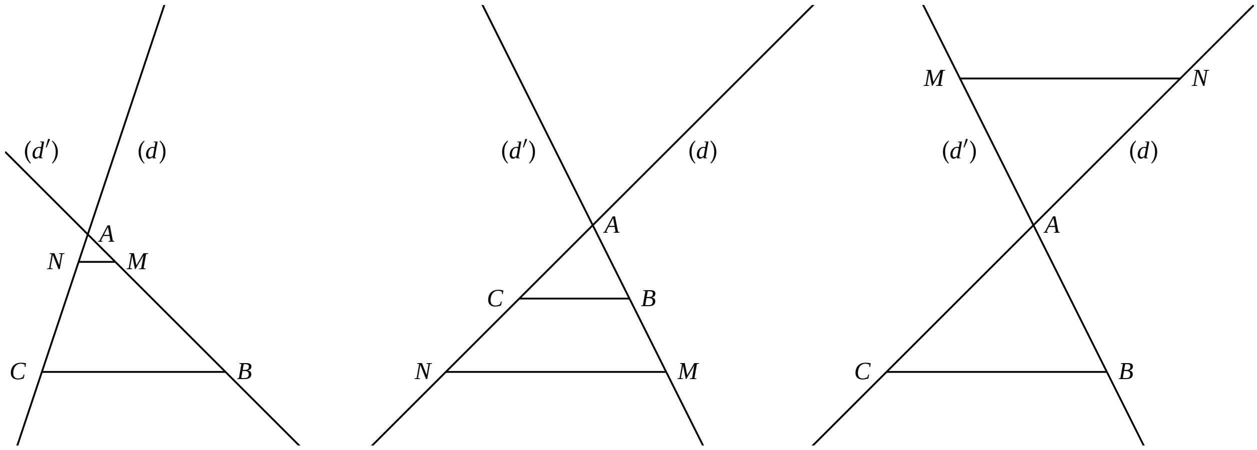
I. Théorème de Thalès

Activité : 1 page 215

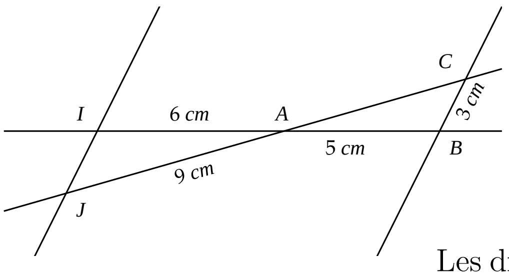
Si A, B et M sont alignés ainsi que les points A, C et N et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \qquad \frac{\text{côtés du triangle } AMN}{\text{côtés correspondants du triangle } ABC}$$

Configurations de Thalès



Exemple :



Les droites (CJ) et (BI) se coupent en A. Les droites (BC) et (IJ) sont parallèles. Calculer les longueurs AC et IJ.

Les points I, A et B sont alignés,
les points J, A et C sont alignés,
les doites (IJ) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \frac{6}{5} = \frac{9}{AC} = \frac{IJ}{3}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{9}{AC}$$
$$6 \times AC = 9 \times 5$$
$$AC = \frac{9 \times 5}{6} = 7,5\,cm$$

$$\frac{6}{5} = \frac{IJ}{3}$$
$$5 \times IJ = 6 \times 3$$
$$IJ = \frac{6 \times 3}{5} = 3,6\,cm$$

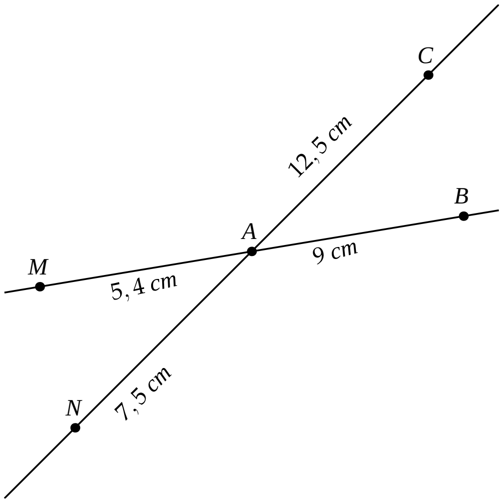
Exercices : 1, 2, 3, 4 et 5 page 220, 9 et 11 page 221, 29 page 224, 40 page 226 et 51 page 228 (informatique)

II. « Réciproque » du théorème de Thalès

Activité : feuille

> Si les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple :



Est-ce que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ? Justifier.
Les points M, A, B sont alignés dans le même ordre que les points N, A, C.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5,4}{9} = 0,6 \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{7,5}{12,5} = 0,6 \end{array}\right\} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$$

D'après la « réciproque » du théorème de Thalès les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Attention :
On aurait pu calculer $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{9}{5,4} \approx 1,66....$ Dans ce cas, il faut laisser le résultat sous forme de fraction :

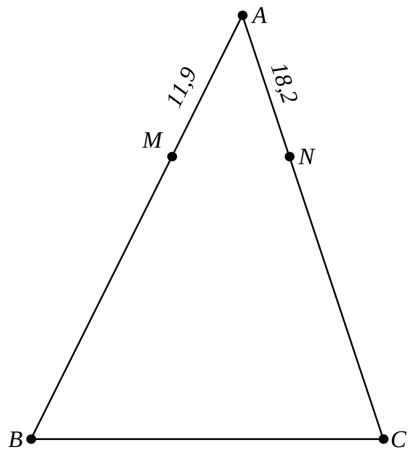
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{9}{5,4} = \dfrac{5}{3} \\[2ex] \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{12,5}{7,5} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$$

Exercices : 12, 13 et 14 page 221.

III. Contraposée du théorème de Thalès

Pour montrer que deux droites ne sont pas parallèles, il suffit de montrer, soit que l'ordre des alignements n'est pas respecté (en supposant que les points soient bien alignés), soit qu'il n'y a pas égalité des rapports de longueurs des côtés étudiés.

Exemple 1 :



$AB = 35$, $AC = 52$.

Est-ce que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ? Justifier

Les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{11,9}{35} = 0,34 \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{18,2}{52} = 0,35 \end{array}\right\} \dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$$

D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exemple 2 : voir 3. de l'activité 1

Exercices : 17 et 20 page 222, 30 page 224, 33 et 34 page 225, 40 et 43 page 226.

I Théorème de Thalès

- ☐ ☐ Activité p 215
- ☐ ☐ 1 p 220
- ☐ ☐ 2 p 220
- ☐ ☐ 3 p 220
- ☐ ☐ 4 p 220
- ☐ ☐ 5 p 220
- ☐ ☐ 9 p 221
- ☐ ☐ 11 p 221
- ☐ ☐ 29 p 224
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 51 p 228 (informatique)

II Réciproque du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 12 p 221
- ☐ ☐ 13 p 221
- ☐ ☐ 14 p 221

III Contraposée du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 17 p 222
- ☐ ☐ 30 p 224
- ☐ ☐ 33 p 225
- ☐ ☐ 34 p 225
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 43 p 226

I Théorème de Thalès

- ☐ ☐ Activité p 215
- ☐ ☐ 1 p 220
- ☐ ☐ 2 p 220
- ☐ ☐ 3 p 220
- ☐ ☐ 4 p 220
- ☐ ☐ 5 p 220
- ☐ ☐ 9 p 221
- ☐ ☐ 11 p 221
- ☐ ☐ 29 p 224
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 51 p 228 (informatique)

II Réciproque du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 12 p 221
- ☐ ☐ 13 p 221
- ☐ ☐ 14 p 221

III Contraposée du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 17 p 222
- ☐ ☐ 30 p 224
- ☐ ☐ 33 p 225
- ☐ ☐ 34 p 225
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 43 p 226

I Théorème de Thalès

- ☐ ☐ Activité p 215
- ☐ ☐ 1 p 220
- ☐ ☐ 2 p 220
- ☐ ☐ 3 p 220
- ☐ ☐ 4 p 220
- ☐ ☐ 5 p 220
- ☐ ☐ 9 p 221
- ☐ ☐ 11 p 221
- ☐ ☐ 29 p 224
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 51 p 228 (informatique)

II Réciproque du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 12 p 221
- ☐ ☐ 13 p 221
- ☐ ☐ 14 p 221

III Contraposée du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 17 p 222
- ☐ ☐ 30 p 224
- ☐ ☐ 33 p 225
- ☐ ☐ 34 p 225
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 43 p 226

I Théorème de Thalès

- ☐ ☐ Activité p 215
- ☐ ☐ 1 p 220
- ☐ ☐ 2 p 220
- ☐ ☐ 3 p 220
- ☐ ☐ 4 p 220
- ☐ ☐ 5 p 220
- ☐ ☐ 9 p 221
- ☐ ☐ 11 p 221
- ☐ ☐ 29 p 224
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 51 p 228 (informatique)

II Réciproque du théorème de Thalès

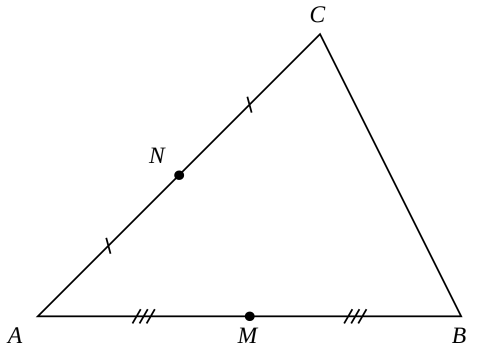
- ☐ ☐ 12 p 221
- ☐ ☐ 13 p 221
- ☐ ☐ 14 p 221

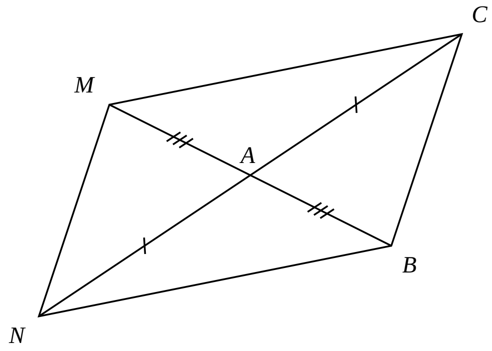
III Contraposée du théorème de Thalès

- ☐ ☐ 17 p 222
- ☐ ☐ 30 p 224
- ☐ ₇☐ 33 p 225
- ☐ ☐ 34 p 225
- ☐ ☐ 40 p 226
- ☐ ☐ 43 p 226

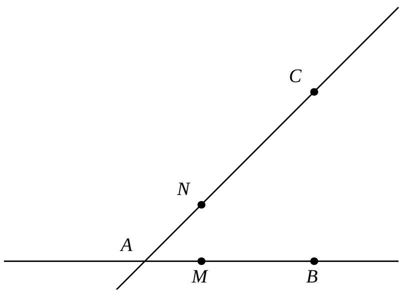
Activité : La « réciproque » du théorème de Thalès

1. Dans les deux cas suivants, compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$. Justifie ensuite que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

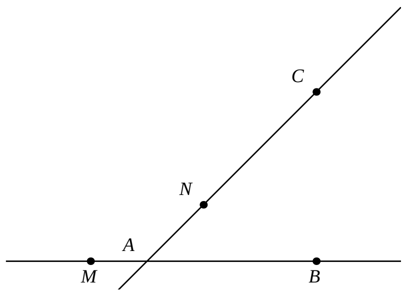




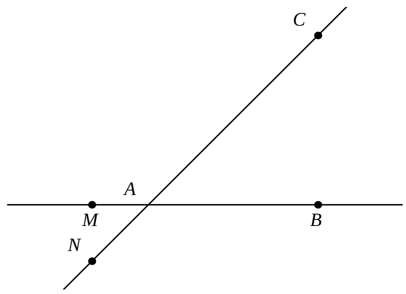
2. Dans les trois cas suivants, compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.
   $AB = 3\,cm$, $AC = 4\,cm$, $AM = 0,9\,cm$, $AN = 1,2\,cm$



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{\dots}{\dots}=\\[2ex] \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{\dots}{\dots}=\end{array}\right\}\ \dfrac{AM}{AB}\quad\dfrac{AN}{AC}$$



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{\dots}{\dots}=\\[2ex] \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{\dots}{\dots}=\end{array}\right\}\ \dfrac{AM}{AB}\quad\dfrac{AN}{AC}$$



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{\dots}{\dots}=\\[2ex] \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{\dots}{\dots}=\end{array}\right\}\ \dfrac{AM}{AB}\quad\dfrac{AN}{AC}$$

3. Dans quels cas les droites (MN) et (BC) semblent être parallèles ?

4. Peut-on conclure uniquement avec l'égalité des rapports ? Que manque-t-il ?

Exercice 1

Soit EFG un triangle tel que $EF = 4\,cm$, $EG = 8\,cm$ et $\widehat{FEG} = 60^\circ$. Place le point M sur le segment $[EF]$ tel que $EM = 1\,cm$.
Construis ensuite la parallèle à la droite (FG) passant par le point M. Elle coupe la droite (EG) en N.
Calcule la longueur EN.

Exercice 2

Partie 1 : Nouveau théorème Soit ABC un triangle quelconque. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la droite (BC) en D. La parallèle à la droite (AC) passant par C coupe la droite (AB) en E.
Démontre que $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.

Partie 2 : Application du théorème Soit un triangle ABC tel que $AB = 24\,cm$, $AC = 56\,cm$ et $BC = 40\,cm$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la droite (CB) en D. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (AC) en E. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ coupe la droite (AB) en F.

1. Calcule les longueurs DB, DC, EA, EC, FA et FB.
2. Evalue les rapports $\dfrac{ID}{IA}$, $\dfrac{IE}{IB}$ et $\dfrac{IF}{IC}$. Calcule leur produit.

Exercice 3

$[AN]$ et $[BM]$ sont deux segments qui se coupent en O qui vérifient $AN = 6\,cm$, $OA = 1,5\,cm$, $BO = 2,5\,cm$, $BM = 10\,cm$.
Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles ; vous justifierez votre réponse en citant avec précision le théorème que vous utilisez. (faites une figure...)

Exercice 4

Soit un triangle ABC tel que $AB = 7\,cm$, $AC = 5\,cm$, $BC = 4\,cm$. Soit le point M du segment $[AC]$ tel que $AM = 3\,cm$. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe le segment $[AB]$ en P.

1. Fais une figure en vraie grandeur.
2. Calcule la longueur AP.

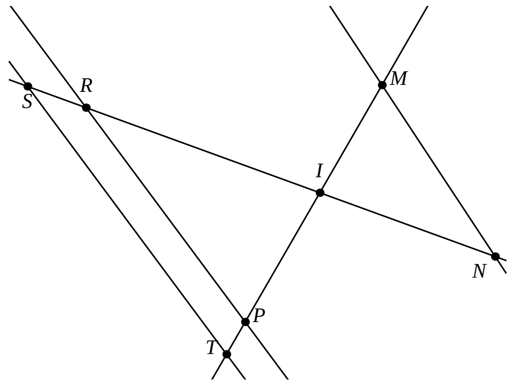
Exercice 5

Soit ABC un triangle quelconque et une droite (d) qui coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en I, J, K.
La perpendiculaire à la droite (d) passant par A coupe la droite (d) en A'.
La perpendiculaire à la droite (d) passant par B coupe la droite (d) en B'.
La perpendiculaire à la droite (d) passant par C coupe la droite (d) en C'.

1. (a) Montre que $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BB'}{CC'}$
   (b) Montre que $\dfrac{JC}{JA} = \dfrac{CC'}{AA'}$
   (c) Montre que $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{AA'}{BB'}$
2. Déduis-en que

$$\frac{KB}{KC} \times \frac{JC}{JA} \times \frac{IA}{IB} = 1$$

Exercice 6



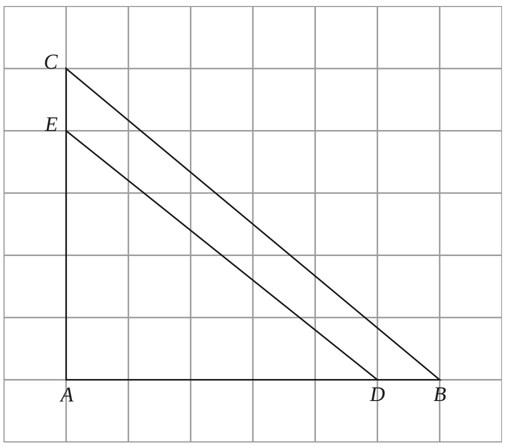
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur :
$IR = 8\,cm$, $RP = 10\,cm$,
$IP = 4,8\,cm$, $IM = 4\,cm$,
$IS = 10\,cm$, $IN = 6\,cm$,
$IT = 6\,cm$.
(On ne demande pas de refaire la figure.)

1. Démontre que les droites (ST) et (RP) sont parallèles.
2. Déduis-en la longueur ST.
3. Les droites (MN) et (ST) sont-elles parallèles ? Justifie.

Exercice 7

On considère un trapèze $ABCD$ dont les bases parallèles sont (AB) et (CD). O est le point d'intersection des diagonales. On trace la parallèle à la droite (BC) passant par A : elle coupe la droite (BD) en M. La parallèle à la droite (AD) passant par B coupe la droite (AC) en N.
Démontre que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

Exercice 8



Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ?

Chapitre 3

Équations, inéquations, systèmes

Sommaire

Programme 2004

Ordre et multiplication.	Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.	On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres.
Inéquation du premier degré à une inconnue.	Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.	
Système de deux équations à deux inconnues	Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.	Pour l'interprétation graphique, on utilisera la représentation des fonctions affines.
Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant.	Résoudre une équation mise sous la forme $A \times B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.	L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est, elle, hors programme.
	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.	Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. Comme en classe de quatrième, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.

I. Équation

Définitions :
Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un ou plusieurs nombres inconnus, le plus souvent représenté par des lettres.
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu qui vérifient l'égalité : chacune de ces valeurs est appelée **une solution de l'équation**. Exemple :

$$\begin{aligned} x+1&=-4\\ x+1-1&=-4-1\\ x&=-5\\ S&=\{-5\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-6&=21\\ 3x-6+6&=21+6\\ 3x&=27\\ x&=\frac{27}{3}=9\\ S&=\{9\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x-5&=x+22\\ 4x-x-5&=x-x+22\\ 3x-5&=22\\ 3x-5+5&=22+5\\ 3x&=27\\ x&=\frac{27}{3}=9\\ S&=\{9\}\end{aligned}$$

Exercices : 3, 4 et 6 page 36 ; 13, 14, 15 et 16 page 37 ; 48 page 40.

II. Mise en équation d'un problème

Chez Casto-Dépôt, si j'achète 3 pots de peintures et 4 rouleaux de peinture, je paie 98,50€. Je sais que le prix d'un rouleau de peinture est moins cher de 2,50€ qu'un pot de peinture.
Quel est le prix d'un pot de peinture ?

Choix de l'inconnue Soit x le prix d'un pot de peinture.

Mise en équation du problème

Prix d'un pot de peinture : x€ .
Prix de 3 pots de peintures : $3x$,€ .
Prix d'un rouleau de peinture : $x-2,5$,€ .
Prix de 4 rouleaux de peinture : $4\times(x-2,5)$,€ .

On obtient alors

$$\underbrace{3x}_{\text{prix des pots de peinture.}} + \underbrace{4(x-2,5)}_{\text{prix des paquets de parquet.}} = 98,50$$

Résolution de l'équation

$$\begin{aligned} 3x+4(x-2,5)&=98,5\\ 3x+4x-4\times 2,5&=98,5\\ 3x+4x-10&=98,5\\ 7x-10&=98,5\\ 7x-10+10&=98,5+10\\ 7x&=108,5\\ x&=\frac{108,5}{7}\\ x&=15,5\end{aligned}$$

Conclusion Le prix d'un pot de peinture est 15,5€ (et le prix d'un paquet de parquet est 13€).

Exercices : 10 page 36 ; 53 page 40.

III. Inéquation

1) Ordre et opérations

> Si on ajoute ou on soustrait le même nombre aux 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.
>
> Si $a < b$ alors $a + c < b + c$ Si $a \geqslant b$ alors $a - d \geqslant b - d$

Exemples :

$3 > 2$ donc $3 + 7 > 2 + 7$ donc $10 > 9$; $3,5 < 4$ donc $7 < 7,5$....

> Si on multiplie ou on divise par un nombre **strictement positif** les 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.
>
> Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$

Exemples :

$4 < 3$ donc $4 \times 2 < 3 \times 2$ donc $8 < 6$; $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ donc $1 > -1$...

Activité 1 : feuille 1

> Si on multiplie ou on divise par un nombre **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité alors on change le sens de l'inégalité.
>
> Si $a < b$ et $d < 0$ alors $a \times d > b \times d$

2) Inéquations

Définitions :
Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, le plus souvent représenté par une lettre.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie. Les valeurs trouvées sont appelées **les solutions de l'inéquation**.
Activité 2 : feuille 2

Exemple :

Résoudre $2x + 1 \geqslant 7$

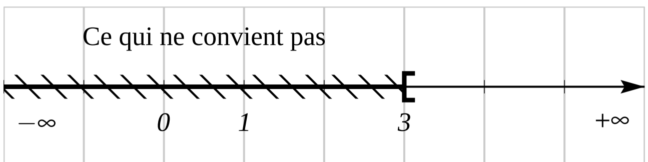
$2x + 1 \geqslant 7$
$2x + 1 - 1 \geqslant 7 - 1$

On soustrait 1 à chaque membre de l'inégalité.

$2x \geqslant 6$
$x \geqslant \frac{6}{2}$

On divise chaque membre de l'inégalité par un nombre positif 2.

$x \geqslant 3$



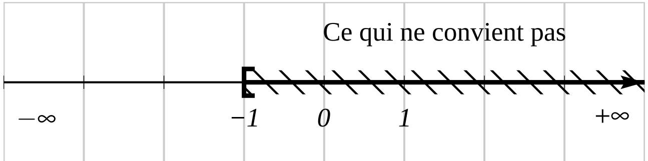
On note : $S = [3; +\infty[$.

Résoudre $-3x - 7 > -4$

$$
\begin{aligned}
-3x - 7 &> -4 \\
-3x - 7 + 7 &> -4 + 7 \\
-3x &> 3 \\
x &< \frac{3}{-3} \\
x &< -1
\end{aligned}
$$

On ajoute 7 à chaque membre de l'inégalité.

On divise chaque membre de l'inégalité par un nombre négatif -3.



On note : $S =]-\infty; -1[$.

Exercices : 26, 28, 29, 30 et 32 page 38.

IV. Mise en inéquation d'un problème

Un club de football propose deux tarifs :
– **Tarif 1** : 7€ par match
– **Tarif 2** : 35€ d'abonnement et 5€ par match.
A partir de combien de matches le tarif 2 est-il plus avantageux ?

Choix de l'inconnue Soit x le nombre de matches auxquels on assiste.

Mise en inéquation du problème Avec le tarif 1, on paie $7x$. Avec le tarif 2, on paie $35 + 5x$.
Le tarif 2 est plus avantageux lorsque $35 + 5x < 7x$.

Résolution de l'inéquation

$$
\begin{aligned}
35 + 5x &< 7x \\
35 + 5x - 5x &< 7x - 5x \\
35 &< 2x \\
\frac{35}{2} &< x \\
17,5 &< x
\end{aligned}
$$

Conclusion On doit assister à 18 matches ou plus pour que le tarif 2 soit le plus avantageux.

Exercices : 35 et 36 page 38.

V. Systèmes de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues

1) Définitions

Un système de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues est constitué de 2 équations à deux inconnues, indissociables l'une de l'autre.

$$
\begin{cases}
2x + 3y = 25 \\
3x + 2y = 20
\end{cases}
$$

Résoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues, c'est trouver toutes les valeurs des inconnues qui vérifient les deux équations ***à la fois*** ; c'est-à-dire qui rendent vraies les deux égalités à la fois. Ces valeurs sont appelées **couple solution du système**

Activité 3 : feuille 3.

Exemple : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ est un système de deux équations du 1$^{\text{er}}$ degré à deux inconnues. Le couple $(1\,;2)$ est la solution du système car les égalités $2\times 1+2=4$ et $1+2=3$ sont vraies toutes les deux.

2) Résolution d'un système de deux équations du 1$^{\text{er}}$ degré à 2 inconnues

Méthode par substitution

Par définition, la substitution est l'action de remplacer, de mettre l'un à la place de l'autre.

Résoudre le système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$$

Pour effectuer la substitution, il faut exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre. Ici, on a choisi d'exprimer x en fonction de y dans la 1$^{\text{re}}$ équation (le coefficient de x y est le plus simple : 1)

$$\begin{cases} x=\boxed{10-3y} \\ 3(x)+5y=18 \end{cases}$$

On effectue la substitution : remplacer x, dans la 2$^{\text{e}}$ équation, par son expression en fonction de y. On obtient alors une équation du 1$^{\text{er}}$ degré à une inconnue.

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 3\boxed{(10-3y)}+5y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 30-9y+5y=18 \end{cases}$$

On résoud l'équation pour obtenir la valeur de y

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 30-4y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ -4y=18-30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ -4y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ y=-3 \end{cases}$$

Une fois la valeur d'une des deux inconnues obtenue, il ne reste qu'à remplacer cette inconnue par sa valeur dans la seule équation faisant encore intervenir les deux inconnues.

$$\begin{cases} x=10-3\times(-3) \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10+9 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=19 \\ y=-3 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(19;-3)$.

Méthode d'élimination par combinaison

La combinaison est l'action de grouper, d'unir plusieurs objets pour en former un nouveau.

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

$$\begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} 2x+3y=15 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$$

Pour combiner les deux équations, il faut qu'une des deux inconnues aient le même coefficient dans les deux équations. C'est ce que l'on fait ici avec l'inconnue x.

$$\begin{cases} 6x+9y=45 \\ 6x+10y=36 \end{cases}$$

On effectue la combinaison : on soustrait membre à membre les deux équations : ici, « la 2^{e} moins la 1re ».

$$\begin{cases} 6x+9y=45 \\ 6x+10y-(6x+9y)=36-45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+9y=45 \\ 6x+10y-6x-9y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+9y=45 \\ y=-9 \end{cases}$$

Une fois la valeur d'une des deux inconnues obtenue, il ne reste qu'à remplacer cette inconnue par sa valeur dans la seule équation faisant encore intervenir les deux inconnues.

$$\begin{cases} 6x+9\times(-9)=45 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-81=45 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x=45+81 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x=126 \\ y=-9 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(21;-9)$.

Exercices : 1 et 6 page 70 ; 12 et 13 page 71 ; 20, 21 et 24 page 72 ; 41 et 42 page 75.

I Équations

☐ ☐ 3 p 36
☐ ☐ 4 p 36
☐ ☐ 6 p 36
☐ ☐ 13 p 37
☐ ☐ 14 p 37
☐ ☐ 15 p 37
☐ ☐ 16 p 37
☐ ☐ 48 p 40

II Mise en équation d'un problème

☐ ☐ 10 p 36
☐ ☐ 53 p 40

III Inéquation

1) Ordre et opérations

2) Inéquation

☐ ☐ 26 p 38
☐ ☐ 28 p 38
☐ ☐ 29 p 38
☐ ☐ 30 p 38

IV Mise en inéquation d'un problème

☐ ☐ 35 p 38
☐ ☐ 36 p 38

V Système de deux équations à deux inconnues

1) Définitions

2) Résolution d'un système

☐ ☐ 1 p 70
☐ ☐ 5 p 70
☐ ☐ 6 p 70
☐ ☐ 12 p 71
☐ ☐ 13 p 71
☐ ☐ 20 p 72
☐ ☐ 21 p 72
☐ ☐ 24 p 72

I Équations

☐ ☐ 3 p 36
☐ ☐ 4 p 36
☐ ☐ 6 p 36
☐ ☐ 13 p 37
☐ ☐ 14 p 37
☐ ☐ 15 p 37
☐ ☐ 16 p 37
☐ ☐ 48 p 40

II Mise en équation d'un problème

☐ ☐ 10 p 36
☐ ☐ 53 p 40

III Inéquation

1) Ordre et opérations

2) Inéquation

☐ ☐ 26 p 38
☐ ☐ 28 p 38
☐ ☐ 29 p 38
☐ ☐ 30 p 38

IV Mise en inéquation d'un problème

☐ ☐ 35 p 38
☐ ☐ 36 p 38

V Système de deux équations à deux inconnues

1) Définitions

2) Résolution d'un système

☐ ☐ 1 p 70
☐ ☐ 5 p 70
☐ ☐ 6 p 70
☐ ☐ 12 p 71
☐ ☐ 13 p 71
☐ ☐ 20 p 72
☐ ☐ 21 p 72
☐ ☐ 24 p 72

I Équations

☐ ☐ 3 p 36
☐ ☐ 4 p 36
☐ ☐ 6 p 36
☐ ☐ 13 p 37
☐ ☐ 14 p 37
☐ ☐ 15 p 37
☐ ☐ 16 p 37
☐ ☐ 48 p 40

II Mise en équation d'un problème

☐ ☐ 10 p 36
☐ ☐ 53 p 40

III Inéquation

1) Ordre et opérations

2) Inéquation

☐ ☐ 26 p 38
☐ ☐ 28 p 38
☐ ☐ 29 p 38
☐ ☐ 30 p 38

IV Mise en inéquation d'un problème

☐ ☐ 35 p 38
☐ ☐ 36 p 38

V Système de deux équations à deux inconnues

1) Définitions

2) Résolution d'un système

☐ ☐ 1 p 70
☐ ☐ 5 p 70
☐ ☐ 6 p 70
☐ ☐ 12 p 71
☐ ☐ 13 p 71
☐ ☐ 20 p 72
☐ ☐ 21 p 72
☐ ☐ 24 p 72

I Équations

☐ ☐ 3 p 36
☐ ☐ 4 p 36
☐ ☐ 6 p 36
☐ ☐ 13 p 37
☐ ☐ 14 p 37
☐ ☐ 15 p 37
☐ ☐ 16 p 37
☐ ☐ 48 p 40

II Mise en équation d'un problème

☐ ☐ 10 p 36
☐ ☐ 53 p 40

III Inéquation

1) Ordre et opérations

2) Inéquation

☐ ☐ 26 p 38
☐ ☐ 28 p 38
☐ ☐ 29 p 38
☐ ☐ 30 p 38

IV Mise en inéquation d'un problème

☐ ☐ 35 p 38
☐ ☐ 36 p 38

V Système de deux équations à deux inconnues

1) Définitions

2) Résolution d'un système

☐ ☐ 1 p 70
☐ ☐ 5 p 70
☐ ☐ 6 p 70
☐ ☐ 12 p 71
☐ ☐ 13 p 71
☐ ☐ 20 p 72
☐ ☐ 21 p 72
☐ ☐ 24 p 72

Activité 1 : Ordre et multiplication

1. On sait que $a < b$. Complète le tableau suivant.

$a \quad \dots \quad b$	$-2a \quad \dots \quad -2b$	$a \div (-5) \quad \dots \quad b \div (-5)$
$3 \quad \dots \quad 4$	$\dots$	$\dots$
$-1 \quad \dots \quad 2$	$\dots$	$\dots$
$-4 \quad \dots \quad -3$	$\dots$	$\dots$

   Que remarque-t-on ?

2. Il faut prouver cette remarque. Soit a et b 2 nombres quelconques tels que $a < b$ et c et d 2 nombres **strictement négatifs** (donc $d \neq 0$).

   Alors on a $a - b < 0$, comparons les produits ac et bc, et les rapports $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$.

$$ac - bc = \underbrace{\underbrace{(a-b)}_{<0} \times \underbrace{c}_{<0}}_{\dots}$$

   donc $ac - bc \dots 0$, donc $ac \dots bc$.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \underbrace{\frac{\overbrace{a-b}^{<0}}{\underbrace{d}_{<0}}}_{\dots}$$

   donc $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} \dots 0$, donc $\frac{a}{d} \dots \frac{b}{d}$.

> *<u>Si</u> on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre* .... *<u>alors</u>* ....

Activité 1 : Ordre et multiplication

1. On sait que $a < b$. Complète le tableau suivant.

$a \quad \dots \quad b$	$-2a \quad \dots \quad -2b$	$a \div (-5) \quad \dots \quad b \div (-5)$
$3 \quad \dots \quad 4$	$\dots$	$\dots$
$-1 \quad \dots \quad 2$	$\dots$	$\dots$
$-4 \quad \dots \quad -3$	$\dots$	$\dots$

   Que remarque-t-on ?

2. Il faut prouver cette remarque. Soit a et b 2 nombres quelconques tels que $a < b$ et c et d 2 nombres **strictement négatifs** (donc $d \neq 0$).

   Alors on a $a - b < 0$, comparons les produits ac et bc, et les rapports $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$.

$$ac - bc = \underbrace{\underbrace{(a-b)}_{<0} \times \underbrace{c}_{<0}}_{\dots}$$

   donc $ac - bc \dots 0$, donc $ac \dots bc$.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \underbrace{\frac{\overbrace{a-b}^{<0}}{\underbrace{d}_{<0}}}_{\dots}$$

   donc $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} \dots 0$, donc $\frac{a}{d} \dots \frac{b}{d}$.

> *<u>Si</u> on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre* .... *<u>alors</u>* ....

Activité 2 : Solutions d'une inéquation

1. Pour chacun des cas suivants, dire si le nombre proposé est solution de l'inéquation proposée.

   (a) $x = 7$ pour $x + 4 > 0$
   (b) $x = -1$ pour $2x - 4 < 0$
   (c) $x = 4$ pour $x - 4 \geqslant 0$
   (d) $x = -2$ pour $3x+4 \leqslant -3$
   (e) $x = 0$ pour $2x+1 > 4x+1$

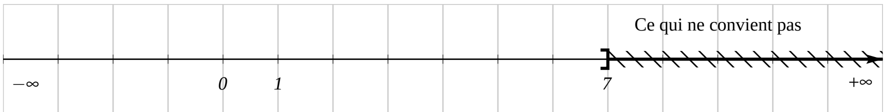
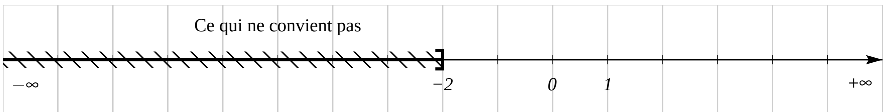
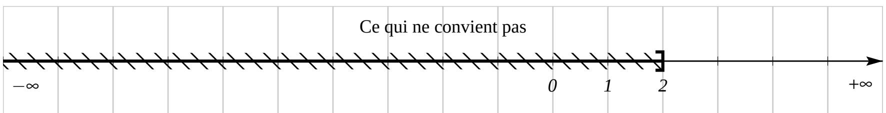
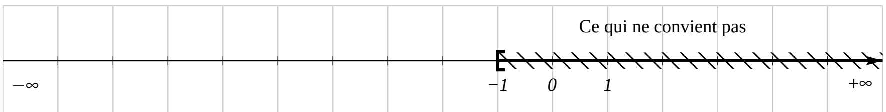
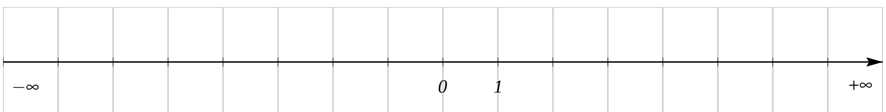
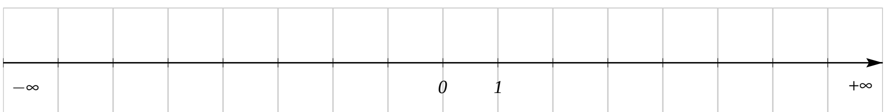
2. Voici plusieurs inéquations. Sans les résoudre, propose au moins deux solutions pour chacune d'elles.

   (a) $x \leqslant 7$
   (b) $3x > 2$
   (c) $2x + 4 \geqslant 0$
   (d) $-4x + 1 < 2x$
   (e) $4x + 2 \leqslant 3 - x$

3. Complète le tableau suivant.

Inéquation	**« Les solutions de l'inéquation sont. . .**
$x \leqslant 7$	tous les nombres inférieurs ou égaux à 7
$x < -2$	tous les nombres strictement inférieurs à -2
$x \ldots\ldots$	tous les nombres supérieurs ou égaux à 3
$x < 4$	tous les nombres . . . .
$x \ldots\ldots$	tous les nombres strictement supérieurs à π

4. Observe attentivement ce tableau et complète-le (les 2 premières lignes sont complètes).

Inéquation	Représentation graphique des solutions	Ensemble solution
$x \leqslant 7$		$S =]-\infty\ ;\ 7]$
$x > -2$		$S =]-2\ ;\ +\infty[$
$x \ldots 2$		$S = \quad 2\ ;\ +\infty$
$x \ldots\ldots$		$S = \quad -\infty\ ;\ -1$
$x < 4$		
$x \geqslant -3$		

5. Représente graphiquement les solutions et donner les ensembles solution des inéquations suivantes :

   (a) $x \leqslant -2$
   (b) $x > \pi$
   (c) $x \geqslant -\dfrac{7}{5}$
   (d) $x < \dfrac{4}{3}$
   (e) $3x + 1 < 2x$
   (f) $2x + 3 < 7$

Activité 3 : Résolution de problèmes

PROBLÈME A

> Donnée D_1 : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 3 livres. Il paie 17€.

Peut-on trouver le prix unitaire des 2 articles ? ....
....

PROBLÈME B

> Donnée D_1 : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 3 livres. Il paie 17€.
> Donnée D_2 : Dans la même papeterie, Luc achète 2 cahiers et 5 livres. Il paie 25€.

Quel est le prix d'un livre ? ....
....
Pourquoi la résolution de ce problème est simple ? ....
....

PROBLÈME C

> Donnée D_1 : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 4 livres. Il paie 23€.
> Donnée D_2 : Dans la même papeterie, Luc achète 1 cahier et 3 livres. Il paie 15,5€.

On ne peut pas trouver directement le prix unitaire de chaque article. Il va falloir « mathématiser » le problème.

Choix des inconnues

Soit ... le prix d'un cahier et ... le prix d'un livre.

Mise en équation du problème

1. Traduis mathématiquement par une équation la donnée D_1.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (1)$$

   C'est une équation à deux inconnues (... et ...).

2. Traduis mathématiquement par une équation la donnée D_2.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (2)$$

3. Les équations (1) et (2) forment **un système de 2 équations du 1^er^ degré à 2 inconnues**. On le note

$$\begin{cases} \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (1) \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (2) \end{cases}$$

4. Pour qu'**un couple de solutions** conviennent, il faut qu'il soit **solution des deux équations à la fois**. Pour chaque couple (prix d'un cahier ; prix d'un livre) proposé ci-dessous, dis s'il peut convenir comme solution (justifie les calculs).

   Solution 1 : (3 ;4) ....
   ....
   Solution 2 : (6,5 ;3) ....
   ....
   Solution 3 : (1,5 ;5) ....
   ....

Résolution du système

1. On va essayer de se retrouver dans une situation similaire au problème B, comment faire ? ...
   ....
2. Écris la nouvelle équation obtenue.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (3)$$

   On dit que les équations (2) et (3) sont **équivalentes** : on obtient l'équation (3) en multipliant l'équation (2) par ....
3. Recopie le système à résoudre en remplaçant l'équation (2) par l'équation (3), puisqu'elles sont équivalentes.

$$\begin{cases} \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (1) \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (3) \end{cases}$$

4. En utilisant le problème B, quel est le prix d'un livre ?
   ....
   ....
   ....
   Cela revient à soustraire membre à membre les équations (3) et (1). Vérifie le.

$$\begin{aligned} (\ldots\ldots + \ldots\ldots) - (\ldots\ldots + \ldots\ldots) &= \ldots - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

5. En connaissant le prix d'un livre, calcule le prix d'un cahier.
   ....
   ....
   ....

Conclusion

Le prix d'un cahier est ...€ et le prix d'un livre est ...€.

Remarque

En général, pour éviter les erreurs de calculs, on essaiera d'avoir des coefficients opposés pour additionner membre à membre les equations, ce qui est plus simple.

Problème D

Donnée D_1 : Dans une papeterie, Jean achète 3 cahiers et 5 livres. Il paie 42€.
Donnée D_2 : Dans la même papeterie, Luc achète 4 cahiers et 7 livres. Il paie 58€.

Résoudre ce problème.

Activité : résolutions du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

Méthode d'élimination par substitution

1. Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'exprimer x en fonction de y dans cette équation : $x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$	1. Exprimer, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Parmi les quatre possibilités, on choisit celle qui rend les calculs plus simple.
2. On remplace x par $-3y+10$ dans la seconde équation. On écrit le nouveau système obtenu : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$	2. Réécrire le système en remplaçant dans l'autre équation l'inconnue choisie, par l'expression obtenue à l'étape 1. On obtient ainsi un système dont l'une des deux équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3. On résout la seconde équation à une inconnue y : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+10 \\ y=\dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$	3. Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4. On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} y=\dots \\ x=-3\times\dots+10 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	4. Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue, on remarquera que l'on peut inverser deux lignes sans changer le résultat.
5. La solution du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple $(\dots;\dots)$.	5. Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

Méthode d'élimination par combinaison

1. Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'éliminer x, on multiplie par -3 les termes de la première équation : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	1. Choisir l'inconnue que l'on veut éliminer. Multiplier les termes des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés dans chacune des deux équations.
2. On additionne membre à membre les deux équations du système $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ On obtient l'équation $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ On écrit le nouveau système $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	2. Écrire le système dont les deux équations ont des coefficients opposés pour l'inconnue à éliminer et additionner membre à membre les deux équations de ce système. Écrire un nouveau système, avec cette équation et l'une des équations de départ. On obtient ainsi un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3. On résout la première équation à une inconnue y : $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	3. Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4. On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots \\ 3x+5\times\dots=18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=\dots \\ x=\dots \end{cases}$	4. Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.
5. La solution du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple $(\dots;\dots)$.	5. Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés. On écrit la 1$^{\text{re}}$inconnue en 1$^{\text{er}}$.

Activité : résolutions du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

Méthode d'élimination par substitution

1. Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'exprimer x en fonction de y dans cette équation : $x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$	1. Exprimer, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Parmi les quatre possibilités, on choisit celle qui rend les calculs plus simple.
2. On remplace x par $-3y+10$ dans la seconde équation. On écrit le nouveau système obtenu : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$	2. Réécrire le système en remplaçant dans l'autre équation l'inconnue choisie, par l'expression obtenue à l'étape 1. On obtient ainsi un système dont l'une des deux équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3. On résout la seconde équation à une inconnue y : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+10 \\ y=\dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$	3. Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4. On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} y=\dots \\ x=-3\times\dots+10 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	4. Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue, on remarquera que l'on peut inverser deux lignes sans changer le résultat.
5. La solution du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple $(\dots;\dots)$.	5. Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

Méthode d'élimination par combinaison

1. Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'éliminer x, on multiplie par -3 les termes de la première équation : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	1. Choisir l'inconnue que l'on veut éliminer. Multiplier les termes des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés dans chacune des deux équations.
2. On additionne membre à membre les deux équations du système $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ On obtient l'équation $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ On écrit le nouveau système $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	2. Écrire le système dont les deux équations ont des coefficients opposés pour l'inconnue à éliminer et additionner membre à membre les deux équations de ce système. Écrire un nouveau système, avec cette équation et l'une des équations de départ. On obtient ainsi un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3. On résout la première équation à une inconnue y : $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	3. Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4. On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots \\ 3x+5\times\dots=18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=\dots \\ x=\dots \end{cases}$	4. Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.
5. La solution du système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple $(\dots;\dots)$.	5. Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés. On écrit la 1$^{\text{re}}$inconnue en 1$^{\text{er}}$.

Exercice 1

Pour 1080 francs, le père de Pierre a acheté 4 cravates et 3 chemises. Sachant que le prix d'une cravate est les $\frac{3}{5}$ de celui d'une chemise, quels sont les prix d'une cravate et d'une chemise ?

Exercice 2

Les nombres 0; -7; 4; -4 sont-ils solutions de l'inéquation $1 - 5x \leqslant 21$?

Exercice 3

Dans la cour de la ferme, il y a des poules et des lapins. J'ai compté 40 têtes et 106 pattes. Combien y-a-t-il de poules et de lapins ?

Exercice 4

Bertrand reçoit son argent de poche du mois par sa mère. Il va voir son grand-père et reçoit la même chose. Sur le chemin du retour, il trouve une pièce de 5 euros. En arrivant chez lui, il s'aperçoit qu'il dispose de 75 euros.
Quel est le montant mensuel de l'argent de poche de Bertrand ?

Exercice 5

Chez un fleuriste, une rose coûte 2€ de plus qu'une marguerite. Un bouquet de 7 roses et 5 marguerites coûte 20€. Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une marguerite ?

Exercice 6

Au musée du jouet, le prix d'entrée est 50 francs (7,62€) pour un adulte et 35 francs (5,34€) le prix d'entrée pour un enfant.

1. Calcule le pourcentage de réduction accordé au prix d'entrée « enfant » par rapport au prix d'entrée « adulte ».
2. Un dimanche, le musée du jouet a reçu 128 personnes et a fait une recette de 5260 francs. Calcule le nombre d'adultes et le nombres d'enfants présents ce dimanche au musée du jouet.

Exercice 7

1. Résous l'inéquation $5 - 2x < x - 4$.
2. Représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Exercice 8

Un groupe de 16 personnes décide de déjeuner au self d'une entreprise. Deux menus sont proposés : le « Menu 1 » à 6€ et le « Menu 2 » à 8€. Chaque personne choisit un des deux menus et la dépense globale est de 110€.
Combien de personnes ont choisi le« Menu 1 » et combien ont choisi le« Menu 2 » ?

Exercice 9

Au cinéma Rex, le prix d'un billet est de 42 francs (6,4€) pour un adulte et 34 francs (5,18€) pour un étudiant. 11 personnes assistent à la projection et paient 430 francs (65,55€).
Combien y a-t-il d'étudiants à cette séance ?

Exercice 10

On considère l'inéquation $4x + 7 > 2 - 3x$.

1. (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
   (b) Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
2. Résoudre l'inéquation $4x + 7 > 2 - 3x$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

Exercice 11

Pierre et Nathalie possèdent ensemble 144 timbres de collection. Si Nathalie donnait 2 timbres à Pierre, alors celui-ci en aurait deux fois plus qu'elle. Combien chaque enfant a-t-il de timbres actuellement ?

Exercice 12

Simon a quarante livres, les uns ont une épaisseur de $5\,cm$, les autres une épaisseur de $3\,cm$. S'il les range sur un même rayon, ils occupent $1,80\,m$. Combien Simon a-t-il de livres de chaque catégorie ?

Exercice 13

On considère trois récipients notés $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.
Le premier, $\mathcal{S}_1$, est une sphère de rayon $5\,cm$. Le second, $\mathcal{S}_2$, est un cylindre dont la base a un rayon égal à $5\,cm$ et dont la hauteur mesure $7\,cm$. Le troisième, $\mathcal{S}_3$, est un cône de révolution dont la base a un rayon égal à $5\,cm$ et dont la hauteur mesure $15\,cm$.

1. Quel récipient possède le plus grand volume ? le plus petit volume ? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la hauteur h du cylindre $\mathcal{S}_4$, dont la base a pour rayon $5\,cm$ sachant que $\mathcal{S}_4$ possède un volume double de celui de $\mathcal{S}_1$?

Exercice 14

Quatre enfants découpent un pain d'épice préparé pour leur goûter. Alice en prend le tiers ; Benoît les $\dfrac{3}{5}$ de ce qu'à laissé Alice ; enfin Cécile et Clément, qui sont jumeaux, se partagent de manière égale le reste.
Quelle est la fraction du pain d'épice que reçoit chacun des jumeaux ?

Exercice 15

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux types de chaises, les unes vendues à 35€ pièce, les autres 60€ pièce.
L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 7 375€ par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 35€ que de chaises à 60€.
Combien doit-elle fabriquer de chaises à 35€ par jour ?

Exercice 16

Deux frères, Marc et Jean, possèdent chacun un jardin. L'aire du jardin de Marc est les $3/4$ de l'aire du jardin de Jean. Les deux frères possèdent en tout $1\,470\,m^2$.
Quelles sont les aires des jardins de Marc et de Jean ?

Exercice 17

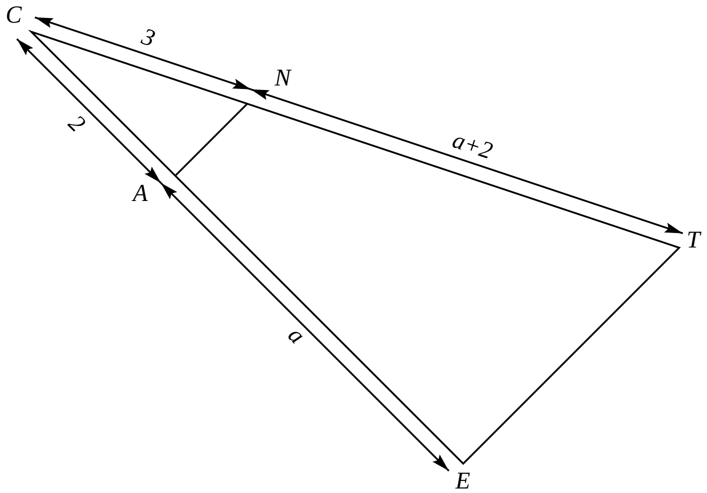
Le périmètre d'un rectangle est $140\,mm$. En doublant la largeur initiale et en retranchant $7\,mm$ à la longueur initiale, on obtient un nouveau rectangle dont le périmètre est égal à $176\,mm$.
Quelles sont les dimensions du rectangle initial ?

Exercice 18

1. Résous l'équation $50 + x = 3(8 + x)$.
2. Justine a 8 ans et sa grand-mère a 50 ans.
   Dans combien d'années, l'âge de sa grand-mère sera-t-il le triple de l'âge de Justine ?

Exercice 19

Sur la figure ci-dessous, a est un nombre positif ; la droite (AN) est parallèle à la droite (ET).
Détermine a.



Exercice 20

Jean et Elsa ont chacun acheté un bouquet composé de roses et de marquerites. Le bouquet de Jean, composé de 5 roses et de 7 marguerites, coûte 7,4€. Le bouquet d'Elsa, composé de 8 roses et de 6 marguerites, coûte 10,8€.
Ecris et résous un système qui permette de calculer le prix d'une rose et d'une marguerite.

Exercice 21

On dispose de n jetons que l'on veut disposer en carré. Par exemple, on peut disposer 16 jetons en un carré de 4 jetons de côté.
En essayant de former un premier carré avec n jetons sur chaque côté, on constate qu'il y a 10 jetons de trop.
En réessayant avec un jeton de plus sur le côté, il manque 17 jetons.
Combien y-a-t-il de jetons en tout ?

Exercice 22

Un opérateur de téléphone portable propose trois formules. L'unité de durée des communications est la minute.

Formule « libre » : pas d'abonnement, 0,50€ par minute.

Formule « éco » : forfait 2 heures mensuelles pour 25€, chaque minute supplémentaire est facturée 0,30€.

Formule « pro » : durée et nombre de communications non limités, prix mensuel 40€.

1. Calcule le coût de 3 heures de communication pour chaque formule.
2. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « libre » qu'avec la formule « eco ».
3. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « libre » qu'avec la formule « pro ».
4. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « pro » qu'avec la formule « eco ».

Exercice 23

Résous l'équation

$$(-3x+1)^2 - 9(2x+7)^2 = 0$$

Exercice 24

Les questions sont indépendantes.

1. Sachant que π est compris entre 3,14 et 3,15, trouve un encadrement du périmètre d'un cercle de rayon $5\,cm$ et un encadrement de l'aire d'un disque de même rayon.
2. Au semi-marathon de Cours-la-Ville, les organisateurs décident de distribuer une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\dfrac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\dfrac{1}{3}$ au second, et au moins 200€ au troisième.
   Quelles informations peut-on en déduire concernant la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

Exercice 25

Deux personnes A et B n'ont qu'une bicyclette pour rejoindre la gare qui est à $23\,km$. B s'empare du vélo et file à $15\,km.h^{-1}$, cependant que A le suit à pied, à $6\,km.h^{-1}$.
Après un certain trajet, B s'arrête et poursui son chemin à pied à $5\,km.h^{-1}$. A trouve la bicyclette et rejoint la gare à $11\,km.h^{-1}$. Les deux persones arrivent en même temps à la gare.
A quelle distance de la gare B a-t-il abandonné le vélo ? Combien de temps à duré le trajet ?

Chapitre 4

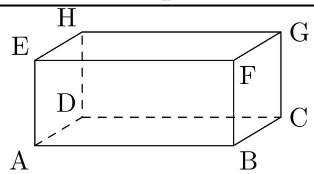
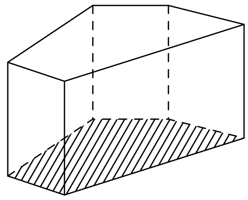
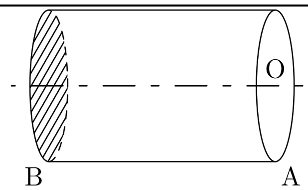
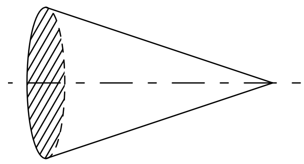
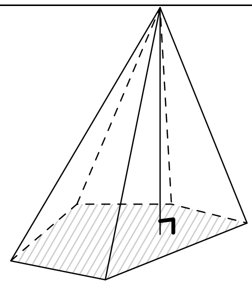
Géométrie dans l'espace

Sommaire

Programme 2004

Sphère	Savoir que la section d'une sphère par un plan est un cercle. Savoir placer le centre de ce cercle et calculer son rayon connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère. Représenter une sphère et certains de ses grands cercles.	On mettra en évidence les grands cercles de la sphère, les couples de points diamétralement opposés. On examinera le cas particulier où le plan est tangent à la sphère. On fera le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour les questions relatives aux méridiens et parallèles.
Problèmes de sections planes de solides	Connaître la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête. Connaître la nature des sections du cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe. Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.	Des manipulations préalables (sections de solides en polystyrène par exemple) permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes étudiées. Ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autres rubriques ou les années antérieures. À propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.
Calculs d'aires et de volumes	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné.	Le travail avec un formulaire, qui n'exclut pas la mémorisation, permettra le réinvestissement et l'entretien d'acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides étudiés dans ces classes.
Effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes	Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k : - l'aire d'une surface est multipliée par k^2, - le volume d'un solide est multiplié par k^3.	Des activités de comparaison d'aires, d'une part, et de volumes, d'autre part, seront autant d'occasions de manipulation de formules et de transformation d'expression algébriques. Ce travail prend appui sur celui fait en géométrie dans l'espace.

I. Rappels

Nom du solide	Représentation	Volume
Parallélépipède rectangle – Solide dont toutes les faces sont des rectangles. Le **cube** en est un cas particulier.		$\mathcal{V} = AB \times AD \times AE$
Prisme – Solide composé de deux *bases* polygonales parallèles et dont toutes *les faces latérales* sont des rectangles. $\mathcal{A}$ est l'aire d'une base et h la hauteur du prisme.		$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$
Cylindre – Solide engendré (c'est-à-dire créé) par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses axes de symétrie ou d'un des ses côtés.		$\mathcal{V} = \pi \times OA^2 \times AB$
Cône – Solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur du cône.		$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
Pyramide – Solide composé d'une *base* polygonale et dont toutes les *faces latérales* sont des triangles qui ont un sommet commun S. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.		$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$

II. Sphère et boule

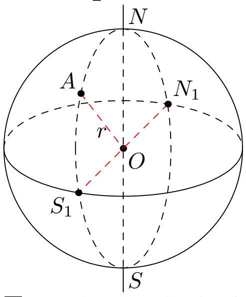
1) Définitions

Activité : 1 page 175

Soit O est un point de l'espace et r est un nombre positif donné.

- La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O égale à r.
- La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à r.
- Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon r est un cercle de centre O et de rayon r.

Exemple



- la sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$. Ici, le point A appartient à la sphère de centre O et de rayon r mais le point O non.
- la boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$. Ici, les points A et O appartiennent à la boule de centre O et de rayon r.
- Le cercle de centre O et de rayon OA est un grand cercle ($OA = r$).

Exercices : 1, 2, 3, 4, 5 page 182

2) Section d'une sphère par un plan

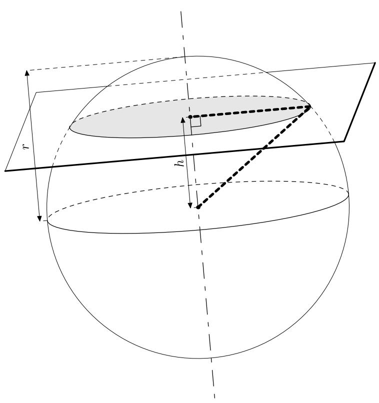
Activité : 2 page 176

Lorsqu'elle existe, la section d'une sphère par un plan est un cercle.

Soit $\mathcal{P}$ un plan perpendiculaire en I à l'un des diamètres $[NS]$ d'une sphère de rayon r. Posons $OI = h$ qui est **la distance du point O au plan $\mathcal{P}$**.

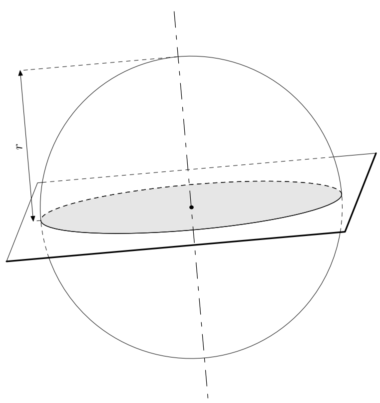
$0 < h < r$

Le cercle de section a pour centre I.



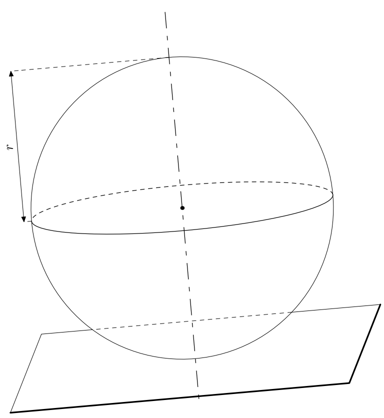
$h = 0$

Le cercle de section a le même centre O et le même rayon r que la sphère : on dit que c'est un **grand cercle** de la sphère.

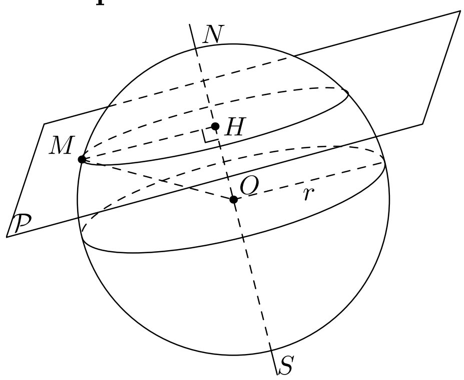


$h = r$

Le cercle de section a pour centre S et pour rayon 0. On dit que **le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère en S**.



Exemple



Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère de centre O et de rayon r : la section obtenue est un cercle de centre H et de rayon MH que l'on calcule à l'aide du théorème de Pythagore.

Application
Calculer la surface de la section de la boule par le plan $\mathcal{P}$ avec $r = 4$ et $OH = 2$.

<u>Exercices :</u> 7 et 8 page 182.

3) Aire d'une sphère – Volume d'une boule

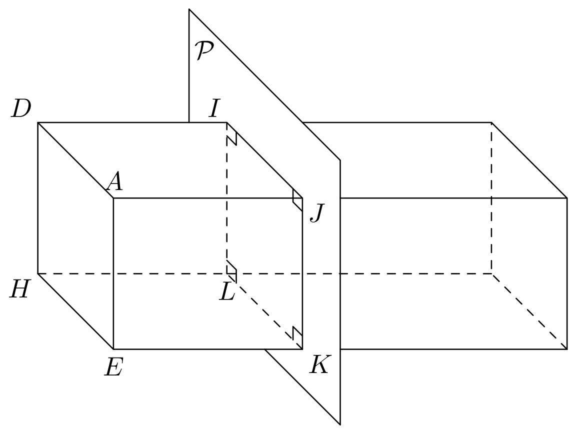
Soit r un nombre positif.
- L'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$.
- Le volume d'une boule de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

<u>Exercices :</u> 9 et 10 page 143 ; 9, 10, 11, 12, 13 page 183 ; 37 page 187 ; 42 et 43 page 188

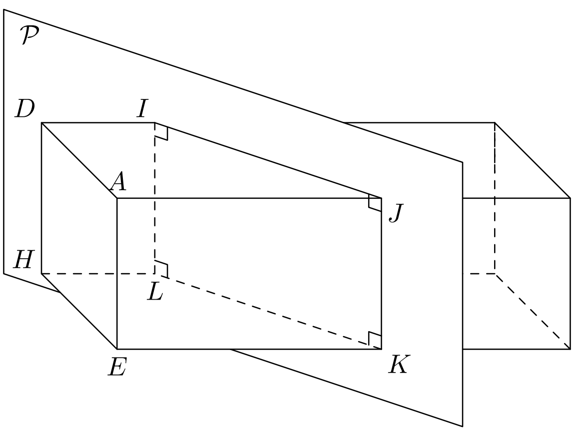
III. Sections de différents solides

1) Le parallélépipède rectangle

<u>Activité :</u> 3.1 page 176



$\mathcal{P}$ est parallèle à la face $ADHE$.

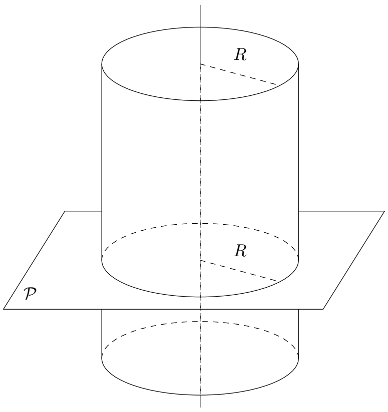


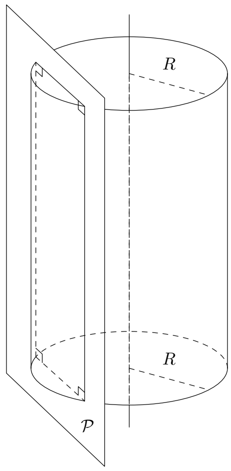
$\mathcal{P}$ est parallèle à l'arête $[AE]$.

<u>Exercices :</u> 14, 15 et 16 page 183 ; 17 page 184

2) Le cylindre de révolution

Activité : 3.2 page 177



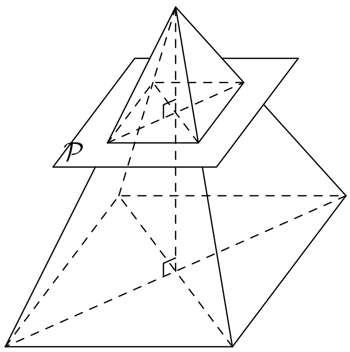


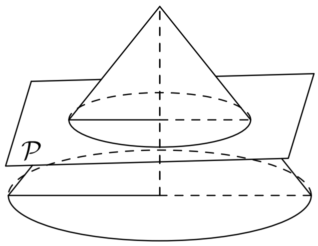
$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution. $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe de révolution.

Exercices : 18, 19 et 20 page 184 ; 48 page 188

3) La pyramide et le cône de révolution

Activité : 4 page 177





$\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base.

Exercices : 21, 22, 23, 24 page 184 ; 38 page 187 ; 27, 28 page 185.

IV. Agrandissements, réductions

1) Agrandissement - réduction

Activité : 1 page 137 ; 2 et 3 page 138

L'**agrandissement de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k supérieur à 1.
La **réduction de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k inférieur à 1.
L'agrandissement et la réduction conservent la nature et les angles de l'objet transformé.

Exemples :

– une maquette réalisée à l'échelle 1/100 est la réduction de rapport $\dfrac{1}{100}$ de l'objet réel.

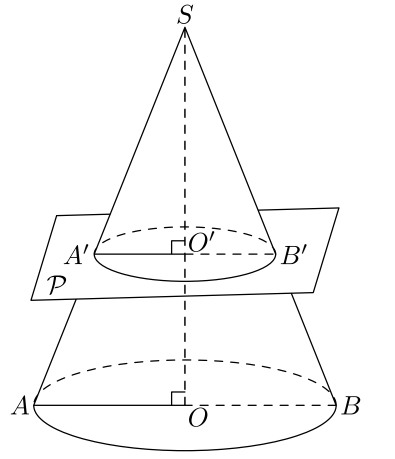
– une feuille de format A3 (rectangle de dimensions $29,7\,cm$ et $42\,cm$) est un agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ d'une feuille de format A4 (rectangle de dimensions $21\,cm$ et $29,7\,cm$).

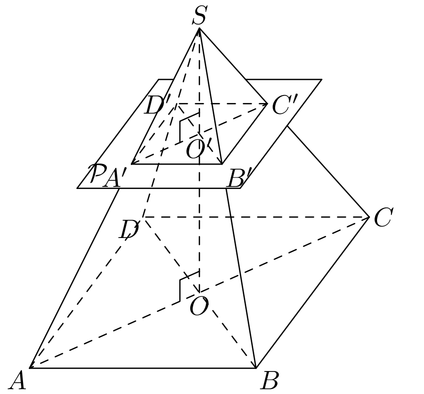
> ADMIS Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

Exemples :

– Deux feuilles de format A4 sont nécessaires pour recouvrir exactement une feuille de format A3 ($k = \sqrt{2}$ et $k^2 = 2$ soit le double de la surface).

– huit petits cubes d'arête a sont nécessaires pour remplir un cube d'arête $2a$ ($k = 2$ et $k^3 = 8$).





$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \dots \qquad k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \dots$$

Exercices : 18, 19 et 23 page 144 ; 29, 32 et 33 page 145 ; 37 page 146 ; 46 page 188 ; 28 et 30 page 145.

3^e

II Sphère et boule

1. Définitions

☐ ☐ Activité 1 p 175
☐ ☐ 1 p 182
☐ ☐ 2 p 182
☐ ☐ 3 p 182
☐ ☐ 4 p 182
☐ ☐ 5 p 182

2. Section d'une sphère par un plan

☐ ☐ Activité 2 p 176
☐ ☐ 7 p 182
☐ ☐ 8 p 182

3. Aire d'une sphère, volume d'une boule

☐ ☐ 9 p 143
☐ ☐ 10 p 143
☐ ☐ 9 p 183
☐ ☐ 10 p 183
☐ ☐ 11 p 183
☐ ☐ 12 p 183
☐ ☐ 13 p 183
☐ ☐ 37 p 187
☐ ☐ 42 p 188
☐ ☐ 43 p 188

III Sections de différents solides

1. Le parallélépipède rectangle

☐ ☐ Activité 3.1 p 176
☐ ☐ 14 p 183
☐ ☐ 15 p 183
☐ ☐ 16 p 183
☐ ☐ 17 p 184

2. Le cylindre de révolution

☐ ☐ 18 p 184
☐ ☐ 19 p 184
☐ ☐ 20 p 184
☐ ☐ 48 p 188

3. La pyramide et le cône de révolution

☐ ☐ Activité 4 p 177
☐ ☐ 21 p 184
☐ ☐ 22 p 184
☐ ☐ 23 p 184
☐ ☐ 24 p 184
☐ ☐ 38 p 187
☐ ☐ 27 p 185
☐ ☐ 28 p 185

IV Agrandissements, réductions

☐ ☐ Activité 1 p 137
☐ ☐ Activité 2 p 138
☐ ☐ Activité 3 p 138
☐ ☐ 18 p 144
☐ ☐ 19 p 144
☐ ☐ 23 p 144
☐ ☐ 29 p 145
☐ ☐ 32 p 145
☐ ☐ 33 p 145
☐ ☐ 37 p 146
☐ ☐ 46 p 188
☐ ☐ 30 p 145
☐ ☐ 28 p 145

3^e

II Sphère et boule

1. Définitions

☐ ☐ Activité 1 p 175
☐ ☐ 1 p 182
☐ ☐ 2 p 182
☐ ☐ 3 p 182
☐ ☐ 4 p 182
☐ ☐ 5 p 182

2. Section d'une sphère par un plan

☐ ☐ Activité 2 p 176
☐ ☐ 7 p 182
☐ ☐ 8 p 182

3. Aire d'une sphère, volume d'une boule

☐ ☐ 9 p 143
☐ ☐ 10 p 143
☐ ☐ 9 p 183
☐ ☐ 10 p 183
☐ ☐ 11 p 183
☐ ☐ 12 p 183
☐ ☐ 13 p 183
☐ ☐ 37 p 187
☐ ☐ 42 p 188
☐ ☐ 43 p 188

III Sections de différents solides

1. Le parallélépipède rectangle

☐ ☐ Activité 3.1 p 176
☐ ☐ 14 p 183
☐ ☐ 15 p 183
☐ ☐ 16 p 183
☐ ☐ 17 p 184

2. Le cylindre de révolution

☐ ☐ 18 p 184
☐ ☐ 19 p 184
☐ ☐ 20 p 184
☐ ☐ 48 p 188

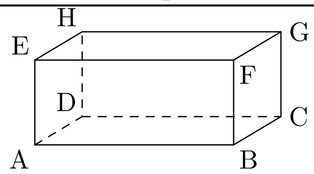
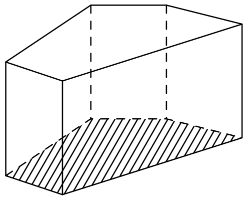
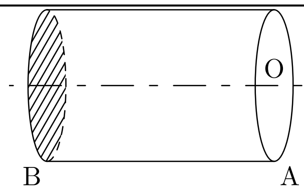
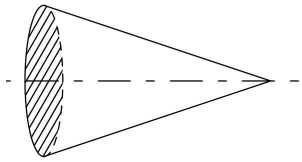
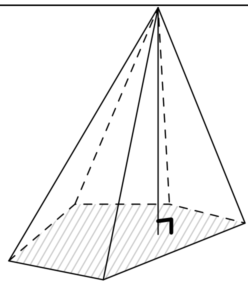
3. La pyramide et le cône de révolution

☐ ☐ Activité 4 p 177
☐ ☐ 21 p 184
☐ ☐ 22 p 184
☐ ☐ 23 p 184
☐ ☐ 24 p 184
☐ ☐ 38 p 187
☐ ☐ 27 p 185
☐ ☐ 28 p 185

IV Agrandissements, réductions

☐ ☐ Activité 1 p 137
☐ ☐ Activité 2 p 138
☐ ☐ Activité 3 p 138
☐ ☐ 18 p 144
☐ ☐ 19 p 144
☐ ☐ 23 p 144
☐ ☐ 29 p 145
☐ ☐ 32 p 145
☐ ☐ 33 p 145
☐ ☐ 37 p 146
☐ ☐ 46 p 188
☐ ☐ 30 p 145
☐ ☐ 28 p 145

I Rappels

Nom du solide	Représentation	Volume
Parallélépipède rectangle – Solide dont toutes les faces sont des rectangles. Le **cube** en est un cas particulier.		$\mathcal{V} = AB \times AD \times AE$
Prisme – Solide composé de deux *bases* polygonales parallèles et dont toutes *les faces latérales* sont des rectangles. $\mathcal{A}$ est l'aire d'une base et h la hauteur du prisme.		$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$
Cylindre – Solide engendré (c'est-à-dire créé) par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses axes de symétrie ou d'un des ses côtés.		$\mathcal{V} = \pi \times OA^2 \times AB$
Cône – Solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur du cône.		$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
Pyramide – Solide composé d'une *base* polygonale et dont toutes les *faces latérales* sont des triangles qui ont un sommet commun S. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.		$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$

II Sphère et boule

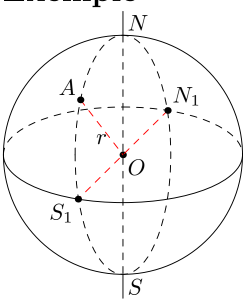
1. Définitions

<u>Activité :</u> 1 page 175

Soit O est un point de l'espace et r est un nombre positif donné.

- La de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O égale à r.
- La de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à r.
- Un d'une sphère de centre O et de rayon r est un cercle de centre O et de rayon r.

Exemple



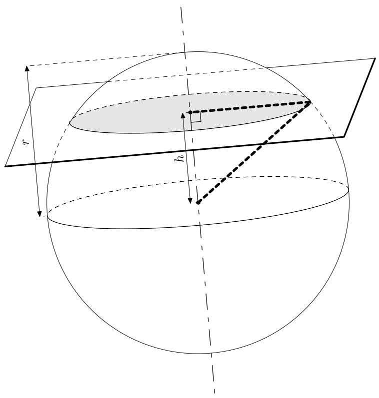
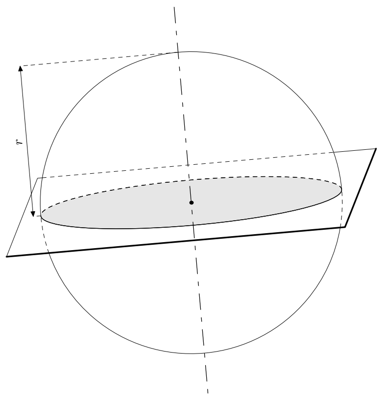
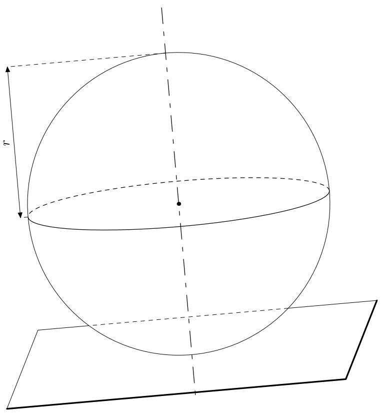
- la sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM . Ici, le point A appartient à la sphère de centre O et de rayon r mais le point O non.
- la boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM . Ici, les points A et O appartiennent à la boule de centre O et de rayon r.
- Le cercle de centre O et de rayon OA est un grand cercle ($OA = r$).

2. Section d'une sphère par un plan

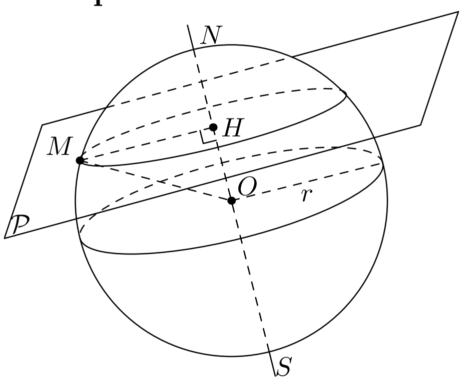
Activité : 2 page 176

> Lorsqu'elle existe, la section d'une sphère par un plan est un cercle.

Soit $\mathcal{P}$ un plan perpendiculaire en I à l'un des diamètres $[NS]$ d'une sphère de rayon r. Posons $OI = h$ qui est **la distance du point O au plan $\mathcal{P}$**.

$0 < h < r$	$h = 0$	$h = r$
Le cercle de section a pour centre I.	Le cercle de section a le même centre O et le même rayon r que la sphère : on dit que c'est un de la sphère.	Le cercle de section a pour centre S et pour rayon 0. On dit que .
		

Exemple



Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère de centre O et de rayon r : la section obtenue est un cercle de centre H et de rayon MH que l'on calcule à l'aide du théorème de Pythagore.

Application

Calculer la surface de la section de la boule par le plan $\mathcal{P}$ avec $r = 4$ et $OH = 2$.

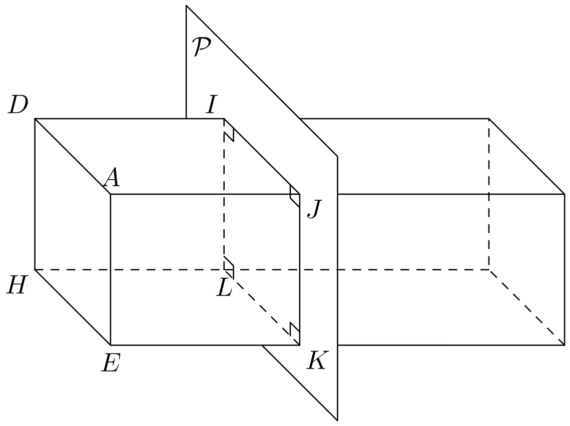
3. Aire d'une sphère – Volume d'une boule

> Soit r un nombre positif.
> - L'aire d'une sphère de rayon r est .
> - Le volume d'une boule de rayon r est .

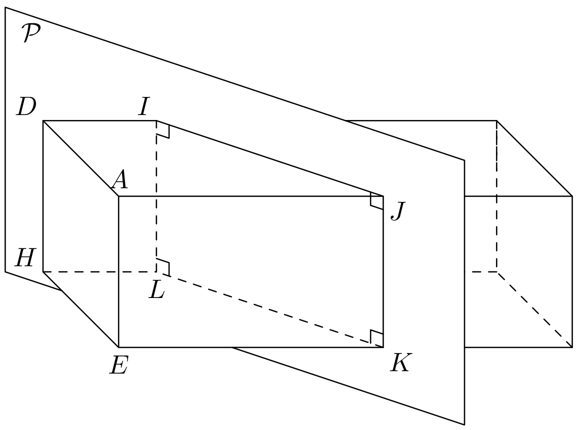
III Sections de différents solides

1. Le parallélépipède rectangle

Activité : 3.1 page 176



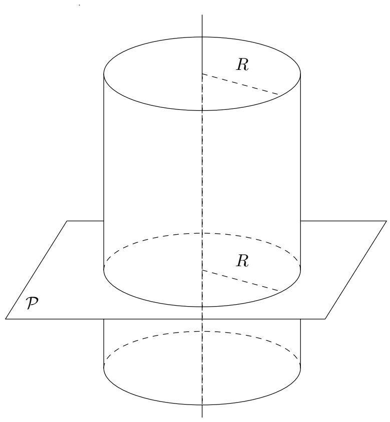
$\mathcal{P}$ est parallèle à la face $ADHE$.



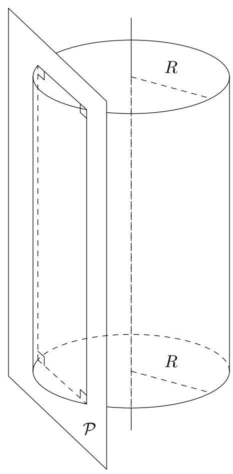
$\mathcal{P}$ est parallèle à l'arête $[AE]$.

2. Le cylindre de révolution

Activité : 3.2 page 177



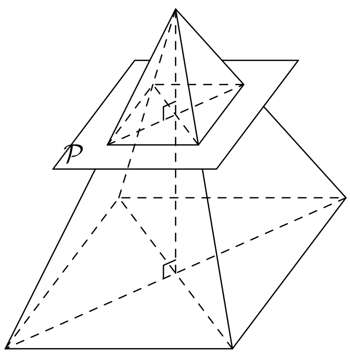
$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution.

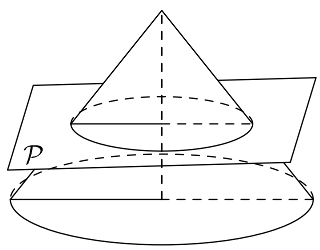


$\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe de révolution.

3. La pyramide et le cône de révolution

Activité : 4 page 177





$\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base.

IV Agrandissement - réduction

Activité : 1 page 137 ; 2 et 3 page 138

L'**agrandissement de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k supérieur à 1.
La **réduction de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k inférieur à 1.
L'agrandissement et la réduction conservent la nature et les angles de l'objet transformé.

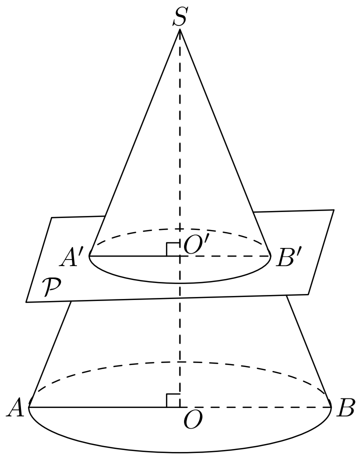
Exemples :

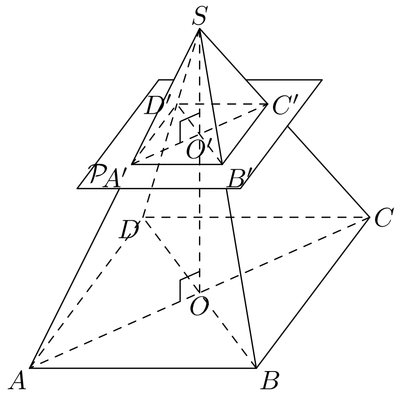
- une maquette réalisée à l'échelle 1/100 est la réduction de rapport $\dfrac{1}{100}$ de l'objet réel.
- une feuille de format A3 (rectangle de dimensions $29,7\,cm$ et $42\,cm$) est un agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ d'une feuille de format A4 (rectangle de dimensions $21\,cm$ et $29,7\,cm$).

ADMIS Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

Exemples :

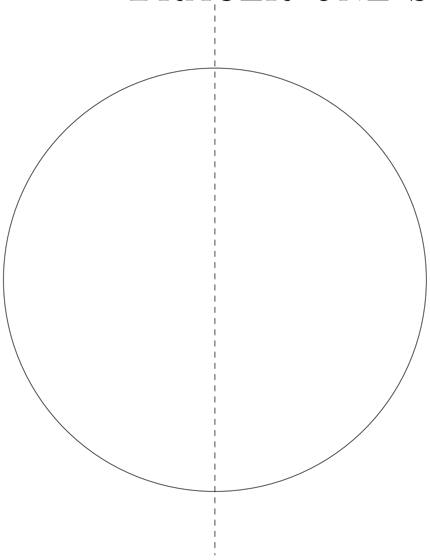
- Deux feuilles de format A4 sont nécessaires pour recouvrir exactement une feuille de format A3 ($k = \sqrt{2}$ et $k^2 = 2$ soit le double de la surface).
- huit petits cubes d'arête a sont nécessaires pour remplir un cube d'arête $2a$ ($k = 2$ et $k^3 = 8$).



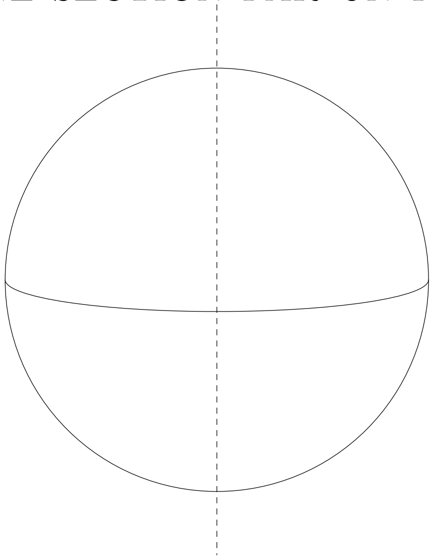


$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \ldots \qquad k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \ldots$$

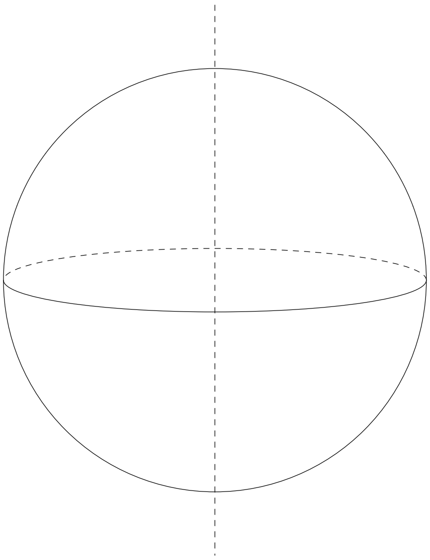
Tracer une sphère et une section par un plan



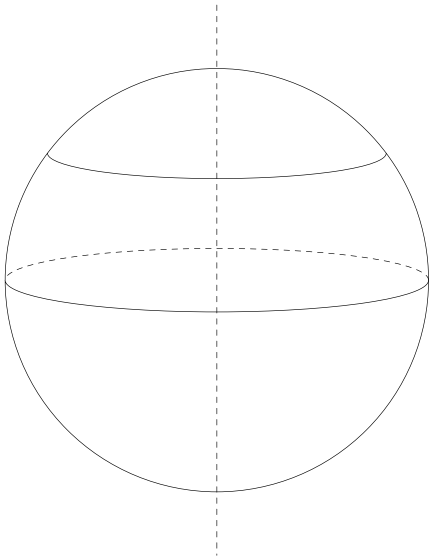
Tracer un cercle, puis un diamètre (vertical, cela rend la construction plus simple) en pointillés.



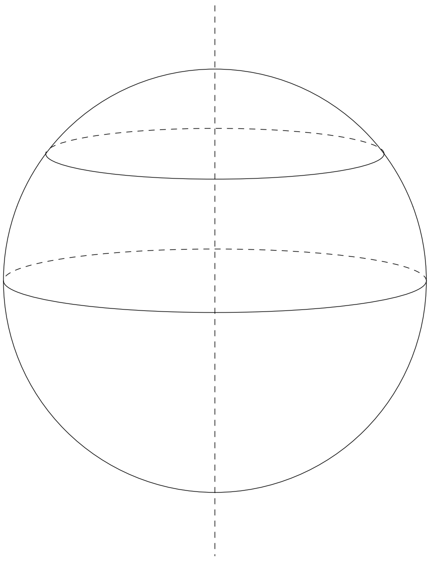
Placer 2 points sur le cerlce, à "hauteur" du centre du cercle, tracer la partie visible,donc en train plein, de l'equateur en prenant les 2 points placés comme extrémité de l'equateur.



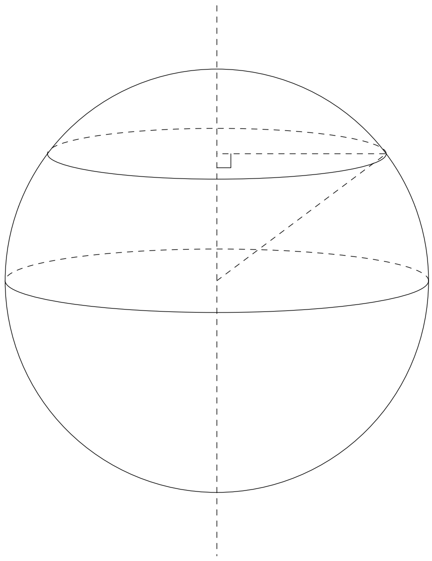
Tracer la partie cachée de l'equateur en poitnillée.



Tracer la première demi-ellipse visible correspondant à la section.



Tracer la partie cachée de la section.

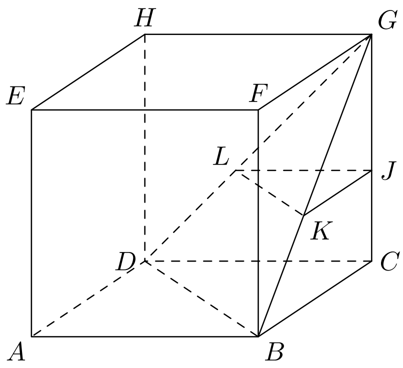


Finaliser la construction en tracant un rayon de cette section ainsi que l'angle droit formé.

Exercice 1

On dispose d'un verre en forme de cône de diamètre $6\,cm$ et de hauteur $9\,cm$. Le verre est rempli jusqu'à la moitié de sa hauteur. Est-il à moitié plein ? Justifie la réponse.
Indication : Il peut être utile de faire une figure.

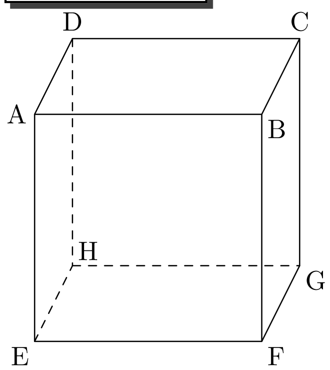
Exercice 2



Un cube $ABCDEFGH$ a pour côté $6\,cm$. J est le point de l'arête $[CG]$ tel que $GJ = 4\,cm$. On coupe $\mathcal{P}$ la pyramide de sommet G et de base BCD par le plan passant par J et parallèle à cette base. On obtient la section JKL.

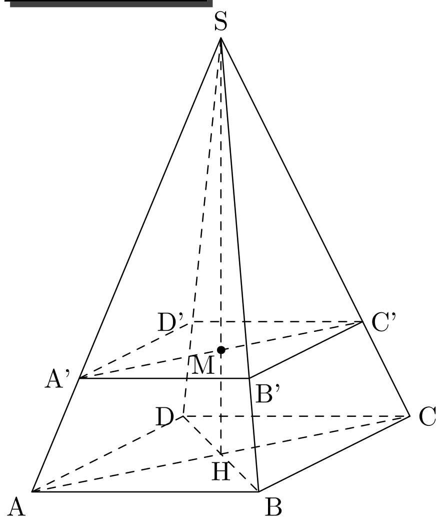
1. (a) Quel est le volume de la pyramide $\mathcal{P}$?
   (b) Dessine un patron de cette pyramide.
2. (a) Quelle est la nature du triangle JKL ? Justifie la réponse.
   (b) Calcule la longueur JK.
   (c) Dessine la section JKL en vraie grandeur.

Exercice 3



1. Dans le cube ci-contre de $12\,cm$ d'arête, détermine la longueur exacte de la diagonale $[AG]$.
2. On considère un cône ayant le même volume que ce cube et dont la base est un disque de rayon $15\,cm$.
   Combien mesure la hauteur de ce cône ? Donne le résultat arrondi au millimètre.

Exercice 4



La figure ci-contre représente une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée, de sommet S, de hauteur SH. L'unité est le centimètre et on a $SH = 6$ et $AD = 8$.

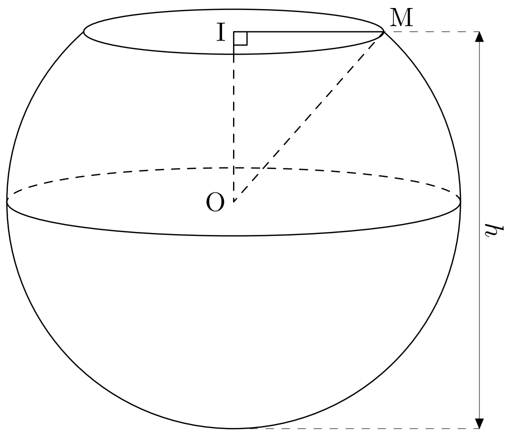
Première partie

1. (a) Trace, en vraie grandeur, le quadrilatère $ABCD$.
   (b) Calcule la longueur AC en valeur exacte.
2. (a) Trace, en vraie grandeur, le triangle SAH.
   (b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ASH}$ (on donnera un résultat arrondi au degré près).

Deuxième partie

1. Calcule le volume de la pyramide $SABCD$.
2. On appelle M le point du segment $[SH]$ tel que $SM = \dfrac{3}{4}SH$. On coupe la pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base et passant par M, comme indiqué sur la figure.
   (a) Quelle est la forme du quadrilatère $A'B'C'D'$?
   (b) Calcule le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.

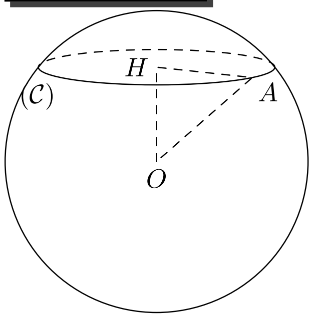
Exercice 5



La figure ci-contre représente un aquarium qui a la forme d'une calotte sphérique de cnetre O, de rayon $R = 12\,cm$ et de hauteur h égale à $21\,cm$, dont l'ouverture est un cercle de centre I et de rayon IM.

1. Calcule la valeur exacte du rayon IM.
2. Calcule le volume de l'aquarium sachant que le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte sphérique. On donnera le résultat de $\mathcal{V}$ arrondi à l'unité près.
3. Combien faut-il de bouteilles de 2 litres pour remplir complétement l'aquarium ?

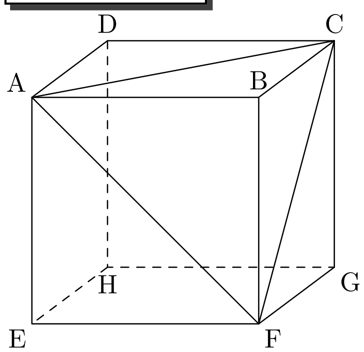
Exercice 6



Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre O. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H et de rayon $4,5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle OHA en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la sphère à $1\,mm$ près.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HOA}$. On donnera une valeur arrondie à 1 degré près.

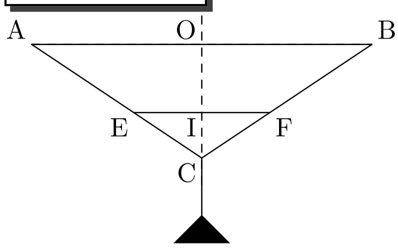
Exercice 7



On considère la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube de côté $3\,cm$.

1. Montrer que le triangle ACF est équilatéral.
2. On considère alors la pyramide $CABF$, de base le triangle ABF et de hauteur CB.
   (a) Calculer le volume de cette pyramide.
   (b) Dessiner un patron de cette pyramide ; on laissera les traits de construction.

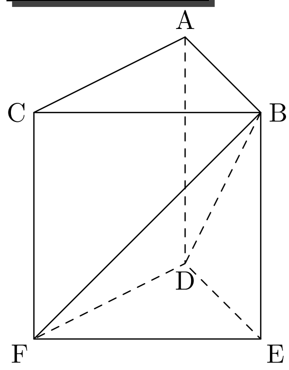
Exercice 8



Dans un verre à pied, ayant la forme d'un cône, et représenté en coupe ci-contre, on laisse fondre 5 glaçons sphériques de $2\,cm$ de diamètre. On donne $OB = 6\,cm$ et $OC = 4\,cm$.

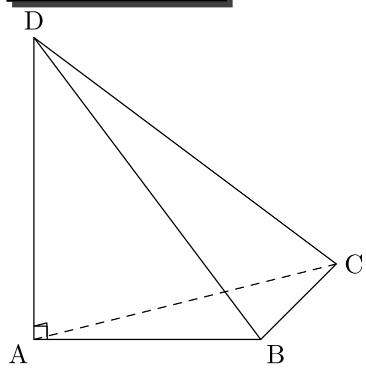
1. Quelle est la valeur exacte $\mathcal{V}$, en cm^3, du volume du verre ?
2. Exprime, en fonction de π, le volume total de glace, en cm^3.
3. Lors de la fusion de la glace, le volume de l'eau produite est obtenu en multipliant par 0,9 celui de la glace. Quelle est la valeur exacte $\mathcal{W}$, en cm^3, du volume d'eau dans le verre, résultant de la fusion complète des 5 glaçons ?
4. Prouve que $\mathcal{V} = 8\mathcal{W}$.
5. Déduis-en la hauteur CI de l'eau dans le verre à pied après fusion complète de la glace.

Exercice 9



$ABCDEF$ est un prisme droit.
On donne $BE = EF = 5\,cm$, $DE = 3\,cm$, $DF = 4\,cm$.
Fais un patron en vraie grandeur de la pyramide $BDEF$ et de la pyramide $BACFD$.

Exercice 10



On considère la pyramide $ABCD$ de hauteur $[AD]$ telle que $AD = 5\,cm$ et de base ABC telle que $AB = 4,8\,cm$; $BC = 3,6\,cm$; $CA = 6\,cm$. (La figure n'est pas aux dimensions.)

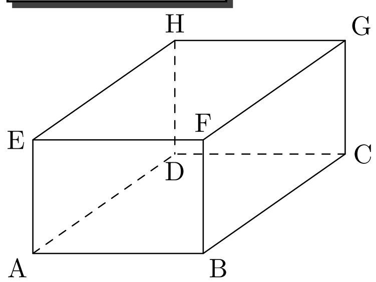
1. Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Calcule le volume de cette pyramide.
3. On désire fabriquer de telles pyramides en plâtre. Combien peut-on en obtenir avec $1\,dm^3$ de plâtre ?

Exercice 11

Soit un cône de révolution de sommet S et de hauteur $[SH]$. La longueur d'*une génératrice*[1] de ce cône est $SA = 6\,cm$ et de plus $\widehat{HSA} = 60^\circ$.

1. Fais une figure regroupant toutes les indications données.
2. (a) Calcule la longueur SH.
   (b) Calcule la longueur AH. Donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.
3. $\mathcal{P}$ est le plan perpendiculaire à la hauteur $[SH]$ en son milieu I. Il coupe la génératrice $[SA]$ en J.
   (a) Complète la figure.
   (b) Que représente le point J pour le segment $[SA]$?
   (c) Calcule la longueur IJ : donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

Exercice 12

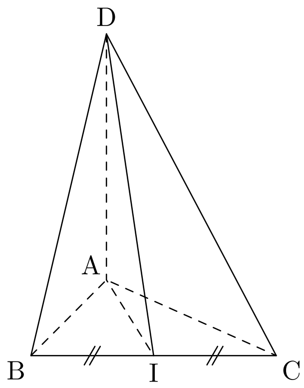


$ABCDEFGH$ est un parallélépipède à base carrée. On donne $AB = BC = 6\,cm$ et $BF = 4,5\,cm$.

1. Montre que $DG = 7,5\,cm$.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{CDG}$ arrondie au degré près.
3. Calcule, en cm^3, le volume de la pyramide $ABCDG$.
4. Construis un patron de cette même pyramide.

Exercice 13

[1]Segment joignant le sommet à un point de la circonférence de la base



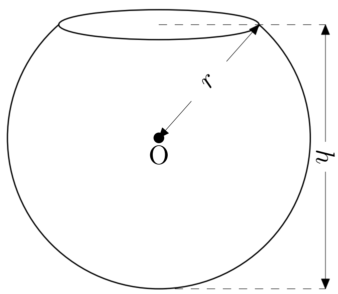
Le solide représenté ci-contre est un tétraèdre $ABCD$. L'unité utilisé est le centimètre.
On sait que $AB = 3$, $AD = 5$, $BC = 5$. De plus, I est le milieu du segment $[BC]$ et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{IAD}$ sont droits.

1. Calcule la longueur AC.
2. Calcule la longueur AI.
3. Calcule la longueur ID. On donnera une valeur approchée au mm.
4. Calcule le volume de ce tétraèdre. On donnera la réponse en litre.

Exercice 14

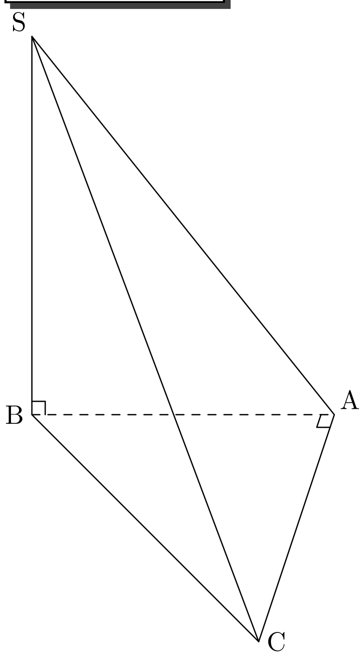
La figure ci-dessous représente une calotte sphérique de centre O, de rayon r et de hauteur h. C'est un solide obtenue après section d'une sphère $\mathcal{S}$ par un plan. Le volume d'un tel solide est donné par la formule suivante

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$



1. Si une calotte sphérique a pour rayon $r = 15\,cm$ et pour hauteur $h = 20\,cm$, quel est son volume ?
2. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 10\,cm$ et pour rayon $r = 6\,cm$, quel est le rayon r_1 du cercle de section ?
3. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 12\,cm$ et pour rayon $r = 8\,cm$, quel est le volume du solide que l'on a enlevé à la sphère $\mathcal{S}$ pour obtenir cette calotte ?

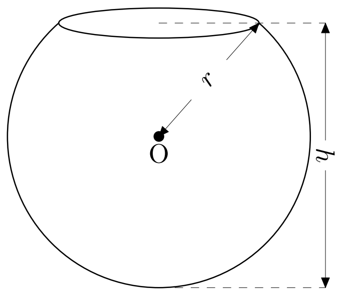
Exercice 15



On considère une pyramide de hauteur $SB = 7\,cm$ et dont la base est un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3\,cm$ et $AC = 4\,cm$.

1. Construis un patron de cette pyramide.
2. Calcule le volume de cette pyramide.
3. On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base : on obtient les points B' sur l'arête $[SB]$, A' sur $[SA]$ et C' sur $[SC]$ tels que $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{3}{7}$.
   (a) Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? Justifie.
   (b) Calcule le volume de la pyramide $SA'B'C'$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au mm^3.

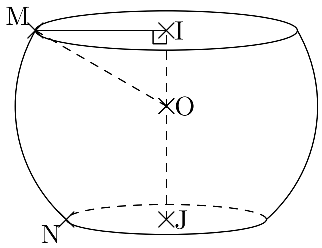
Exercice 16



Partie A La figure ci-contre représente une calotte sphérique de centre O, de rayon r et de hauteur h. Le volume d'un tel solide est donné par la formule suivante

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

1. Si une calotte sphérique a pour rayon $r = 15\,cm$ et pour hauteur $h = 20\,cm$, quel est son volume ?
2. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 9\,cm$ et pour volume $\mathcal{V} = 81\pi\,cm^3$, quel est son rayon ?
3. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 10\,cm$ et pour rayon $r = 6\,cm$, quel est le rayon r_1 du cercle de section ?



Partie B Un aquarium a la forme d'une sphère de $16\,cm$ de rayon coupée par deux plans parallèles. Ces plans sont situés respectivement à $12,8\,cm$ et $9,6\,cm$ du centre.

1. Calcule l'aire des disques de sections en fonction de π.
2. Calcule le volume de l'aquarium. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au mm^3 près.

Racines carrées

Sommaire

Programme 2004

Racine carrée d'un nombre positif	Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre dont le carré est a. Sur des exemples numériques où a est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$. Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif.	La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, qui a déjà été utilisée en classe de quatrième, fournit une valeur approchée d'une racine carrée. Le travail mentionné sur les identités remarquables permet d'écrire des égalités comme : $(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1) = 1$, $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$.
Produit et quotient de deux radicaux	Sur des exemples numériques, où a et b sont deux nombres positifs, utiliser les égalités : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	Ces résultats, que l'on peut facilement démontrer à partir de la définition de la racine carrée d'un nombre positif, permettent d'écrire des égalités telles que : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. On habituera ainsi les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

I. Définition

Si a est un nombre positif alors **la racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est a.

$$\text{Si } a \geqslant 0 \text{ alors } \sqrt{a} \geqslant 0 \text{ et } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemples : $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$.
$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ et 5 est positif.
$\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ car $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ et $\dfrac{3}{2}$ est positif.

Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples : $\sqrt{5,6^2} = 5,6$, $\sqrt{\pi^2} = \pi$.

Exercices : 1, 2, 6, 8 et 9 page 54

II. Produit et Quotient de 2 racines carrées

Rappels : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

1) Racine carrée et multiplication

Si a et b sont deux nombres positifs alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \qquad \text{Simplification d'écriture}$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$3\sqrt{7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{63}$$

Exercices : 22, 25, 27, 28, 29 et 30 page 55 ; 33 et 35 page 56

2) Racine carrée et division

Si a et b sont deux nombres positifs avec $b \neq 0$ alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$$

Exercices : 23, 24 et 34 page 55 ; 50, 52, 53 et 54 page 58. DM : 62 page 58.

III. L'équation $X^2 = a$

Activité : 2 page 48.

Soit a un nombre positif.
– Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet 2 solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
– Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : 0.
– Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions.

Exemples : Soit l'équation $x^2 = 5$.
L'équation admet deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

Exercices : 11, 15, 16 et 18 page 54 ; 19 page 55 ; 57 page 58.

I Définition

☐ ☐ 1 p 54
☐ ☐ 2 p 54
☐ ☐ 6 p 54
☐ ☐ 8 p 54
☐ ☐ 9 p 54

II Produit et quotient de 2 racines carrées

1) Racine carrée et multiplication

☐ ☐ 22 p 55
☐ ☐ 25 p 55
☐ ☐ 27 p 55
☐ ☐ 28 p 55
☐ ☐ 29 p 55
☐ ☐ 30 p 55
☐ ☐ 33 p 56
☐ ☐ 35 p 56

2) Racine carrée et division

☐ ☐ 23 p 55
☐ ☐ 24 p 55
☐ ☐ 34 p 55
☐ ☐ 50 p 58
☐ ☐ 52 p 58
☐ ☐ 53 p 58
☐ ☐ 54 p 58
☐ ☐ DM 62 p 58

III L'équation $X^2 = a$

☐ ☐ Activité 2 p 48
☐ ☐ 11 p 54
☐ ☐ 15 p 54
☐ ☐ 16 p 54
☐ ☐ 18 p 54
☐ ☐ 19 p 55
☐ ☐ 57 p 58

I Définition

☐ ☐ 1 p 54
☐ ☐ 2 p 54
☐ ☐ 6 p 54
☐ ☐ 8 p 54
☐ ☐ 9 p 54

II Produit et quotient de 2 racines carrées

1) Racine carrée et multiplication

☐ ☐ 22 p 55
☐ ☐ 25 p 55
☐ ☐ 27 p 55
☐ ☐ 28 p 55
☐ ☐ 29 p 55
☐ ☐ 30 p 55
☐ ☐ 33 p 56
☐ ☐ 35 p 56

2) Racine carrée et division

☐ ☐ 23 p 55
☐ ☐ 24 p 55
☐ ☐ 34 p 55
☐ ☐ 50 p 58
☐ ☐ 52 p 58
☐ ☐ 53 p 58
☐ ☐ 54 p 58
☐ ☐ DM 62 p 58

III L'équation $X^2 = a$

☐ ☐ Activité 2 p 48
☐ ☐ 11 p 54
☐ ☐ 15 p 54
☐ ☐ 16 p 54
☐ ☐ 18 p 54
☐ ☐ 19 p 55
☐ ☐ 57 p 58

I Définition

☐ ☐ 1 p 54
☐ ☐ 2 p 54
☐ ☐ 6 p 54
☐ ☐ 8 p 54
☐ ☐ 9 p 54

II Produit et quotient de 2 racines carrées

1) Racine carrée et multiplication

☐ ☐ 22 p 55
☐ ☐ 25 p 55
☐ ☐ 27 p 55
☐ ☐ 28 p 55
☐ ☐ 29 p 55
☐ ☐ 30 p 55
☐ ☐ 33 p 56
☐ ☐ 35 p 56

2) Racine carrée et division

☐ ☐ 23 p 55
☐ ☐ 24 p 55
☐ ☐ 34 p 55
☐ ☐ 50 p 58
☐ ☐ 52 p 58
☐ ☐ 53 p 58
☐ ☐ 54 p 58
☐ ☐ DM 62 p 58

III L'équation $X^2 = a$

☐ ☐ Activité 2 p 48
☐ ☐ 11 p 54
☐ ☐ 15 p 54
☐ ☐ 16 p 54
☐ ☐ 18 p 54
☐ ☐ 19 p 55
☐ ☐ 57 p 58

I Définition

☐ ☐ 1 p 54
☐ ☐ 2 p 54
☐ ☐ 6 p 54
☐ ☐ 8 p 54
☐ ☐ 9 p 54

II Produit et quotient de 2 racines carrées

1) Racine carrée et multiplication

☐ ☐ 22 p 55
☐ ☐ 25 p 55
☐ ☐ 27 p 55
☐ ☐ 28 p 55
☐ ☐ 29 p 55
☐ ☐ 30 p 55
☐ ☐ 33 p 56
☐ ☐ 35 p 56

2) Racine carrée et division

☐ ☐ 23 p 55
☐ ☐ 24 p 55
☐ ☐ 34 p 55
☐ ☐ 50 p 58
☐ ☐ 52 p 58
☐ ☐ 53 p 58
☐ ☐ 54 p 58
☐ ☐ DM 62 p 58

III L'équation $X^2 = a$

☐ ☐ Activité 2 p 48
☐ ☐ 11 p 54
☐ ☐ 15 p 54
☐ ☐ 16 p 54
☐ ☐ 18 p 54
☐ ☐ 19 p 55
☐ ☐ 57 p 58

Exercice 1

On donne

$$A = \sqrt{12} + 5\sqrt{75} - 2\sqrt{27} \qquad\qquad B = \left(5 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2$$

Écris A sous la forme $a\sqrt{3}$ et B sous la forme $b\sqrt{3}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

Exercice 2

Soit $x = \sqrt{5}\left(1 - \sqrt{2}\right)$ et $y = 5 + \sqrt{2}$.
Calcule x^2; y^2; $x^2 + y^2$; $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 3

On pose $F = \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right) - 8\sqrt{7}\left(1 - \sqrt{7}\right)$
Ecris F sous la forme $a + b\sqrt{7}$ (a et b sont des nombres entiers relatifs).

Exercice 4

L'unité de mesure choisie est le centimètre. On donne trois points A, B et C tels que

$$AB = 2\sqrt{3},\ BC = \sqrt{75},\ AC = \sqrt{147}$$

1. Vérifie que $AB + BC = AC$.
2. Que peux-tu en conclure pour ces trois points ? Justifie ta réponse.

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. Soit RST un triangle tel que $RS = \sqrt{45}$, $ST = 3\sqrt{5}$, $TR = \sqrt{90}$. Quelle est la nature de ce triangle ?
2. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un entier relatif ou d'une fraction irréductible :

$$A = \left(2 + 3\sqrt{5}\right)\left(2 - 3\sqrt{5}\right) \qquad\qquad B = \frac{3\sqrt{45}}{6\sqrt{20}}$$

3. Écris le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers.

$$E = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$$

Exercice 6

La formule

$$P = 0,08 \times S \times V^2$$

permet de calculer la vitesse limite V (en m/s) atteinte par un parachutiste lors de sa descente.
S représente la superficie du parachute exposée à la résistance de l'air (en m^2).
P est la masse du parachutiste (en kg).
En supposant que $S = 40\,m^2$, calcule la vitesse limite atteinte par un parachutiste de $80\,kg$. On donnera une valeur exacte puis un arrondi au dixième.

Exercice 7

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{2\,000}$ et $BC = \sqrt{1\,000}$.

1. La longueur est-elle le double de la largeur ? Pourquoi ?
2. Exprime $\sqrt{2\,000}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ et $\sqrt{1\,000}$ sous la forme $b\sqrt{10}$, où a et b sont des entiers.
3. Exprime l'aire du rectangle sous la forme $c\sqrt{2}$, où c est un nombre entier.
4. Montre que le périmètre du rectangle peut s'écrire sous la forme

$$20\sqrt{5}\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

Exercice 8

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

$\sqrt{3}-1$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
$\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$	$\sqrt{3}+1$

Chapitre 6

Trigonométrie et angle inscrit

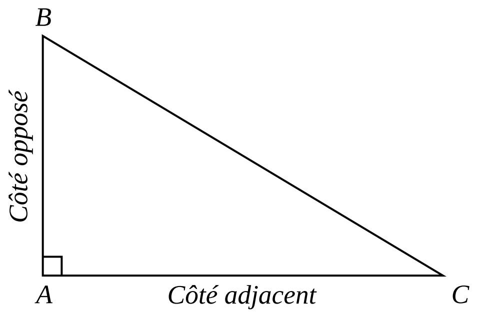
Sommaire

Programme 2004

Triangle rectangle : relation trigonométrique	Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés du triangle.	La définition du cosinus a été vue en quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront introduits comme rapports de longueurs ou à l'aide du quart de cercle trigonométrique. On établira les formules : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
	Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées : - du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné, - de l'angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.	On n'utilisera pas d'autre unité que le degré décimal.
Angle inscrit	Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.	On généralise le résultat relatif à l'angle droit, établit en classe de quatrième. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné, autre qu'un angle droit, est hors programme.

I. Vocabulaire

Dans un triangle ABC rectangle en A :



le segment $[BC]$ est l'hypoténuse.
le segment $[AC]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$.
le segment $[AB]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.

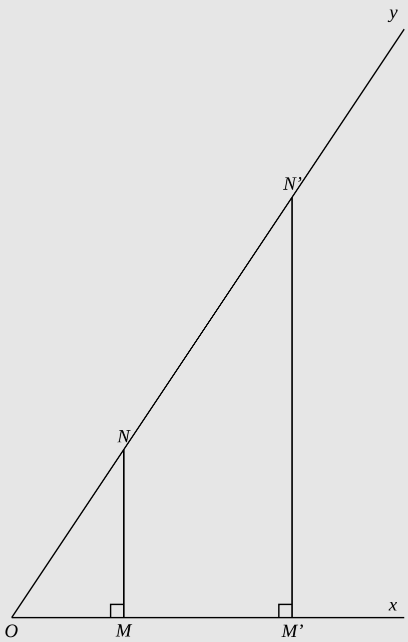
<u>Rappel</u> : Dans le triangle ABC rectangle en A, on a

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \qquad\qquad \cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

II. Sinus et tangente d'un angle aigu

<u>Activité :</u> feuille 1.



Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu. Pour tout triangle rectangle ayant $\widehat{xOy}$ comme angle, on a

$$\sin\widehat{xOy} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{xOy}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{xOy} = \frac{MN}{ON} = \frac{M'N'}{ON'}$$

$$\tan\widehat{xOy} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{xOy}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{xOy}}$$

$$\tan\widehat{xOy} = \frac{MN}{OM} = \frac{M'N'}{OM'}$$

<u>Si</u> ABC est un triangle rectangle en A <u>alors</u> $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

III. Relations trigonométriques

Activité : feuille 2.

Dans un triangle rectangle, si x désigne la mesure de l'un des angles aigus alors

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Remarque : On note également $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ et $(\cos x)^2 = \cos^2 x$.
Exemple :
Soit θ un angle aigu tel que $\sin\theta = 0,4$.

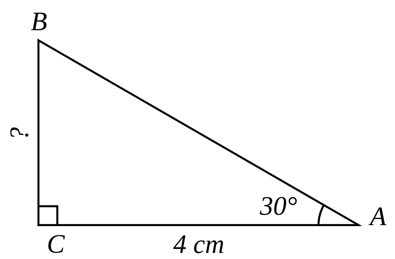
1. Calculer $\cos\theta$.
2. Calculer $\tan\theta$.
3. Calculer θ à 1 degré près.

Exercices : 32 et 33 page 205.

IV. Applications

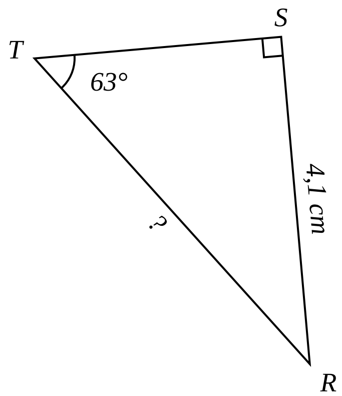
Pour les calculs, on utilise le mode « **degré** » de la calculatrice.

1) Calcul de longueur



Dans le triangle ABC rectangle en C, on a

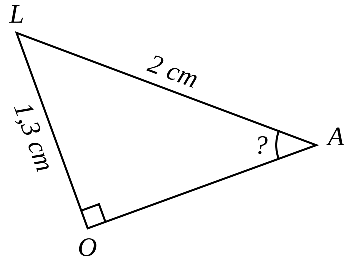
$$\tan\widehat{CAB} = \frac{BC}{AC}$$
$$\tan 30 = \frac{BC}{4}$$
$$BC = 4 \times \tan 30$$
$$BC \simeq 2,3\,cm$$



Dans le triangle RST rectangle en S, on a

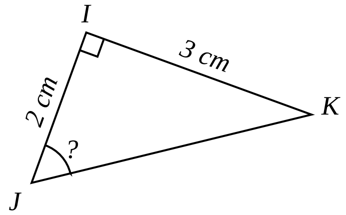
$$\sin\widehat{RTS} = \frac{RS}{RT}$$
$$\sin 63 = \frac{4,1}{RT}$$
$$RT \times \sin 63 = 4,1$$
$$RT = \frac{4,1}{\sin 63}$$
$$RT \simeq 4,6\,cm$$

2) Calcul d'angle



Dans le triangle LOA rectangle en O, on a

$$\sin \widehat{LAO} = \frac{OL}{AL}$$
$$\sin \widehat{LAO} = \frac{1,3}{2}$$
$$\widehat{LAO} \simeq 41^\circ$$



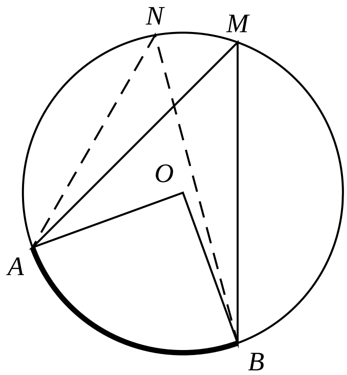
Dans le triangle IJK rectangle en I, on a

$$\tan \widehat{IJK} = \frac{IK}{IJ}$$
$$\tan \widehat{IJK} = \frac{3}{2}$$
$$\widehat{IJK} \simeq 56^\circ$$

Exercices : 4, 5, 6 et 7 page 202 ; 8, 9, 10, 11, 12, 16 et 20 page 203 ; 24, 26 et 27 page 204 ; 56 et 59 page 208.

V. Le théorème de l'angle inscrit

1) Vocabulaire



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O.

- On dit qu'un angle $\widehat{AMB}$ est **inscrit** dans le cercle $\mathcal{C}$ lorsque son sommet M appartient au cercle $\mathcal{C}$ et lorsque $[MA]$ et $[MB]$ sont des cordes du cercle $\mathcal{C}$.

  On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

  Exemple : : l'angle $\widehat{MNB}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et il intercepte l'arc $\overset{\frown}{MB}$.
- L'angle $\widehat{AOB}$ est **l'angle au centre** associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$: ces deux angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

2) Théorème

Activité 4 page 256.

Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

Conséquence : Si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ces deux angles ont même mesure.

Exemple : Les angles $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, donc $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

Exercices : 13 et 14 page 263 ; 15, 16 et 17 page 264.

I Vocabulaire

II Sinus et tangente d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille 1

III Applications

☐ ☐ 4 p 202
☐ ☐ 5 p 202
☐ ☐ 6 p 202
☐ ☐ 7 p 202
☐ ☐ 8 p 203
☐ ☐ 9 p 203
☐ ☐ 10 p 203
☐ ☐ 11 p 203
☐ ☐ 12 p 203
☐ ☐ 16 p 203
☐ ☐ 20 p 203
☐ ☐ 24 p 204
☐ ☐ 26 p 204
☐ ☐ 27 p 204
☐ ☐ 56 p 208
☐ ☐ 59 p 208

IV Relations trigonométriques

☐ ☐ 32 p 205
☐ ☐ 33 p 205

V Théorème de l'angle inscrit

☐ ☐ activité 4 p 256
☐ ☐ 13 p 263
☐ ☐ 14 p 263
☐ ☐ 15 p 264
☐ ☐ 16 p 264
☐ ☐ 17 p 264

I Vocabulaire

II Sinus et tangente d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille 1

III Applications

☐ ☐ 4 p 202
☐ ☐ 5 p 202
☐ ☐ 6 p 202
☐ ☐ 7 p 202
☐ ☐ 8 p 203
☐ ☐ 9 p 203
☐ ☐ 10 p 203
☐ ☐ 11 p 203
☐ ☐ 12 p 203
☐ ☐ 16 p 203
☐ ☐ 20 p 203
☐ ☐ 24 p 204
☐ ☐ 26 p 204
☐ ☐ 27 p 204
☐ ☐ 56 p 208
☐ ☐ 59 p 208

IV Relations trigonométriques

☐ ☐ 32 p 205
☐ ☐ 33 p 205

V Théorème de l'angle inscrit

☐ ☐ activité 4 p 256
☐ ☐ 13 p 263
☐ ☐ 14 p 263
☐ ☐ 15 p 264
☐ ☐ 16 p 264
☐ ☐ 17 p 264

I Vocabulaire

II Sinus et tangente d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille 1

III Applications

☐ ☐ 4 p 202
☐ ☐ 5 p 202
☐ ☐ 6 p 202
☐ ☐ 7 p 202
☐ ☐ 8 p 203
☐ ☐ 9 p 203
☐ ☐ 10 p 203
☐ ☐ 11 p 203
☐ ☐ 12 p 203
☐ ☐ 16 p 203
☐ ☐ 20 p 203
☐ ☐ 24 p 204
☐ ☐ 26 p 204
☐ ☐ 27 p 204
☐ ☐ 56 p 208
☐ ☐ 59 p 208

IV Relations trigonométriques

☐ ☐ 32 p 205
☐ ☐ 33 p 205

V Théorème de l'angle inscrit

☐ ☐ activité 4 p 256
☐ ☐ 13 p 263
☐ ☐ 14 p 263
☐ ☐ 15 p 264
☐ ☐ 16 p 264
☐ ☐ 17 p 264

I Vocabulaire

II Sinus et tangente d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille 1

III Applications

☐ ☐ 4 p 202
☐ ☐ 5 p 202
☐ ☐ 6 p 202
☐ ☐ 7 p 202
☐ ☐ 8 p 203
☐ ☐ 9 p 203
☐ ☐ 10 p 203
☐ ☐ 11 p 203
☐ ☐ 12 p 203
☐ ☐ 16 p 203
☐ ☐ 20 p 203
☐ ☐ 24 p 204
☐ ☐ 26 p 204
☐ ☐ 27 p 204
☐ ☐ 56 p 208
☐ ☐ 59 p 208

IV Relations trigonométriques

☐ ☐ 32 p 205
☐ ☐ 33 p 205

V Théorème de l'angle inscrit

☐ ☐ activité 4 p 256
☐ ☐ 13 p 263
☐ ☐ 14 p 263
☐ ☐ 15 p 264
☐ ☐ 16 p 264
☐ ☐ 17 p 264

Chapitre 7

Arithmétique

Sommaire

Programme 2004

		Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le $PGCD$ de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

I. Vocabulaire

Définition :
La division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b non nul permet d'obtenir le couple $(q; r)$ de nombres entiers tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{avec } r < b$$

Exemple : $417 = 19 \times 21 + 18$
Dans la division euclidienne de a par b (a et b sont deux nombres entiers), si le reste r est nul alors on dit que :
- a est un multiple de b ;
- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- b divise a.

Exemple : 325 est un multiple de 25 car $325 = 25 \times 13$ (325 est aussi un multiple de 13).
399 est divisible par 19 car $399 = 19 \times 21$ (19 et 21 sont des diviseurs de 399).

Définition :
Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{5}; \frac{17}{9}; \ldots\right)$.
Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel $\left(\pi; \sqrt{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \ldots\right)$.

Méthode :
Pour résoudre certains exercices, il peut être utile de faire un tableau comme celui-ci :

	$\sqrt{2}$	$\frac{13}{27}$	3
Entier			X
Décimal			X
Rationnel		X	X

Exercice : 1 page 89.

II. Diviseur commun à deux nombres entiers

1) Définition

Soit a et b deux nombres entiers non nuls. Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise à la fois a et b.

Exemple : 6 est un diviseur commun de 12 et 18 (car $12 = 6 \times 2$ et $18 = 6 \times 3$).
11 est un diviseur commun de 99 et 132 (car $99 = 11 \times 9$ et $132 = 11 \times 12$).

2) $PGCD$

Activité : 2 page 83 1.

Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs.
Parmi tous les diviseurs communs à a et b, l'un deux est plus grand que tous les autres.
On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur ou PGCD. On le note PGCD$(a; b)$.

Exemple : Les diviseurs de 12 sont 1; 2; 3; 4; 6; 12. Les diviseurs de 8 sont 1; 2; 4. Le plus grand des diviseurs communs est 4 donc $\text{PGCD}(12; 8) = 4$.

3) Nombres premiers entre eux

Activité : 2 page 83 (2).

Soit a et b deux entiers strictement positifs.
Lorsque $\text{PGCD}(a; b) = 1$, on dit que les nombres a et b sont premiers entre eux.

Exercice : 3, 4, 5 et 6 page 89.

III. Calcul du $PGCD$

1) Par soustraction

Activité : 2 page 83 (3).

Si a et b sont deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$ alors

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a - b; b)$$

Cette propriété permet de trouver le $PGCD$ par **soustractions successives**

$$\left.\begin{array}{l} \text{PGCD}(95; 57) = \text{PGCD}(38; 57) \text{ car } 98 - 57 = 38 \\ \text{PGCD}(57; 38) = \text{PGCD}(19; 38) \text{ car } 57 - 38 = 19 \\ \text{PGCD}(38; 19) = \text{PGCD}(19; 19) = 19 \text{ car } 57 - 38 = 19 \end{array}\right\} \text{Donc } \text{PGCD}(95; 57) = 19$$

2) Avec l'algorithme d'Euclide

Activité : 3 page 84 (1),(2),(3).

Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.
Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$$

Cette propriété permet de trouver le PGCD par **l'algorithme d'Euclide**

a	b	r	
1 078	322	112	car $1\,078 = 3 \times 322 + 112$
322	112	98	car $322 = 2 \times 112 + 98$
112	98	14	car $112 = 1 \times 98 + 14$
98	14	0	car $98 = 7 \times 14 + 0$

Le processus s'arrête car les restes deviennent de plus en plus petit.
Le $\text{PGCD}(a; b)$ est $\boxed{\text{le dernier reste non nul}}$. Donc $\text{PGCD}(1\,078; 322) = 14$.

Exercice : 7, 8, 9 et 10 page 89 ; 24, 25, 27 et 30 page 91.

IV. Fractions irréductibles

Activité : 4 page 85.

Soit a et b deux nombres entiers tels que $b \neq 0$.
Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : : La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible car $\text{PGCD}(2;3) = 1$.
La fraction $\frac{322}{1\,078}$ n'est pas irréductible car $\text{PGCD}(322;1\,078) = 14$.

$$\frac{322}{1\,078} = \frac{23 \times 14}{77 \times 14} = \frac{23}{77}$$

Exercice : 11, 12 et 14 page 90 ; 36 page 93.

Exercices livre

7.1 Vocabulaire

☐ ☐ 1 p 89

7.2 Diviseurs communs à deux entiers

7.2.1 Définition

7.2.2 PGCD

☐ ☐ Activité 2 p 83 1

7.2.3 Nombres premiers entre eux

☐ ☐ Activité 2 p 83 2
☐ ☐ 3 p 89
☐ ☐ 4 p 89
☐ ☐ 5 p 89
☐ ☐ 6 p 89

7.3 Calcul du PGCD

7.3.1 Par soustraction

☐ ☐ Activité 2 p 83 3

7.3.1 Avec l'algorithme d'euclide

☐ ☐ Activité 3 p 84 1, 2, 3
☐ ☐ 7 p 89
☐ ☐ 8 p 89
☐ ☐ 9 p 89
☐ ☐ 10 p 89
☐ ☐ 24 p 91
☐ ☐ 25 p 91
☐ ☐ 27 p 91
☐ ☐ 30 p 91

7.4 Fractions irréductibles

☐ ☐ Activité 4 p 85
☐ ☐ 11 p 90
☐ ☐ 12 p 90
☐ ☐ 14 p 90
☐ ☐ 36 p 93

V. Exercices

Exercice 1

n est un entier supérieur à 6 et on pose

$$F = \frac{n+9}{n-6}$$

1. Donne la forme irréductible de F pour $n = 9$, $n = 25$, $n = 46$.
2. Démontre que

$$F = 1 + \frac{15}{n-6}$$

3. Déduis-en toutes les valeurs de n pour lesquelles F est un nombre entier.

Exercice 2

1. Calcule le PGCD$(32\,760, 61\,425)$.
2. Rends irréductible la fraction $\frac{32\,760}{61\,425}$.

Exercice 3

1. Ecris les fractions suivantes sous leur forme irréductible

$$a = \frac{4862}{2145} \qquad b = \frac{3450}{759}$$

2. Le quotient du produit de 2 nombres x et y par leur PGCD s'appelle le Plus Petit Commun Multiple noté ppcm$(x; y)$.
   (a) Exprime ppcm$(x; y)$ en fonction de x, y et PGCD$(x; y)$.
   (b) Calcule le ppcm$(429; 11)$.
   (c) Déduis-en la somme de a et b.

Exercice 4

1. Donne l'égalité traduisant la division euclidienne de 1 512 par 21.
2. Rends irréductible la fraction $\frac{720}{1\,512}$.

Chapitre 8

Fonctions affines, linéaires. Proportionnalité.

Sommaire

Programme 2004

Fonction linéaire	Connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée.	La définition d'une fonction linéaire, de coefficient directeur a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est "je multiplie par a". Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5% c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5% c'est multiplier par 0,95.
	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de donnée d'un nombre non nul et de son image.	L'étude de la fonction linéaire est aussi l'occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \mapsto ax$ pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(0,25)$, on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.
	Représenter graphiquement une fonction linéaire. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax+b$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite. C'est une occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur varie de 1 à 3).
Fonction affine, fonction affine et fonction linéaire associée.	Connaître la notation $x \mapsto ax + b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées. Déterminer une fonction affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.	Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme "je multiplie par a, puis j'ajoute b". La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite, qui a une équation de la forme $y = ax + b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et de y.
	Représenter graphiquement une fonction affine. Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, on entraînera les élèves à travailler à partir de deux points pris sur la droite et à exploiter la représentation graphique. On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une courbe affine. Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance spécifique n'est exigible sur ce sujet.

I. Fonctions : introduction

II. Fonctions linéaires

1) Définitions

Activité : 1 page 97

Exemple : L'unité de longueur est le centimètre. Notons x la longueur du côté d'un carré et y le périmètre de ce carré.

x	1	0,8	3
y	4	3,2	12

On obtient un tableau de proportionnalité : le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté et 4 est le coefficient de proportionnalité.
On peut écrire $y = 4 \times x$ ou $y = 4x$.

Exercices : 2, 3 et 4 page 104.
Activité : 2 page 97.

Soit a un nombre quelconque « fixe ».
Si à chaque nombre x on peut associer son produit par a (c'est à dire $x \times x$) alors on définit **la fonction linéaire** de coefficient a

$$x \xrightarrow{\times a} ax$$

On dit que ax est l'image de x.

Notation :
La fonction linéaire de coefficient a se note $x \mapsto ax$ et se lit « à x, on associe ax ».
On peut également la noter par une lettre, f par exemple. Alors l'image de x par la fonction linéaire f se note $f(x)$ et se lit « f de x ».

Exemples :
- La fonction linéaire qui à x associe le nombre $4x$ a pour coefficient 4. On écrit

$$f : x \mapsto 4x \text{ ou } f(x) = 4x$$

- Si f est la fonction linéaire de coefficient -2 alors l'image de 3 est $-2 \times 3 = -6$ et on note $f(3) = -6$.
- Si g est la fonction linéaire de coefficient 5 alors le nombre x qui a pour image 15 est 3.

Remarque : Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

Exercices : 9, 10 et 11 page 104 ; 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19 page 105 ; 34 et 35 page 107.

2) Fonction linéaire et pourcentage

Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\dfrac{t}{100}$.
Augmenter un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $1 + \dfrac{t}{100}$.
Diminuer un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Exemples 15% de x : $x \times \dfrac{15}{100}$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 0,15 \times x$.
Diminuer x de 12% : $x \times \left(1 - \dfrac{12}{100}\right) = x \times 0,88$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 0,88 \times x$.
Augmenter x de 3% : $x \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = x \times 1,03$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 1,03 \times x$.
Exercices : 20 et 21 page 105.

III. Fonction affine

1) Définitions

Soit a et b deux nombres quelconques « fixes ».
Définir une fonction affine, c'est associer à chaque nombre x, le nombre $ax + b$.
On dit que $ax + b$ est l'image de x.

Notation La fonction affine qui à x associe $ax + b$ se note $x \mapsto ax + b$ et se lit « à x, on associe $ax + b$ ».
On peut également la noter par une lettre, f par exemple. Dans ce cas, l'image de x se note $f(x)$ et se lit « f de x ».

Exemple : f est la fonction affine qui à x associe $2x - 1$.
L'image de 3 est $2 \times 3 - 1 = 5$ et on note $f(3) = 5$.

Cas particuliers :
$b = 0$ On obtient $f : x \mapsto ax$, c'est à dire une fonction linéaire.
$a = 0$ On obtient $f : x \mapsto b$, c'est à dire une fonction **constante**.
On dit que $x \mapsto ax$ est la fontion linéaire associée à la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

Exercices : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 page 124 ; 16, 17 et 18 page 71.

2) Proportionnalité des accroissements

ADMIS Soit f une fonction affine $x \mapsto ax + b$.
Si x varie (c'est à dire augmente ou diminue) d'un nombre h, alors son image $f(x)$ varie de ah.

Application Déterminer la fonction affine f tel que $f(1) = 4$ et $f(3) = 8$.

1re méthode
Une application affine est de la forme $x \mapsto ax+b$.

x	1	3
$f(x)$	4	8

Donc

$$4 = 2 \times a$$
$$a = 2$$

D'où f est de la forme $x \mapsto 2x + b$.
Or $f(1) = 2 \times 1 + b$ et $f(1) = 4$.
D'où

$$4 = 2 + b$$
$$b = 2$$

L'application affine cherchée est $x \mapsto 2x + 2$.

2^e^méthode

Une application affine est de la forme $x \mapsto ax+b$.

Donc $\begin{cases} 4 = a \times 1 + b \\ 8 = a \times 3 + b \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = a + b \\ 8 = 3a + b \end{cases}$

$\begin{cases} -4 = -a - b \\ 8 = 3a + b \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = 2a \\ 8 = 3a + b \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2 \\ 8 = 6 + b \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

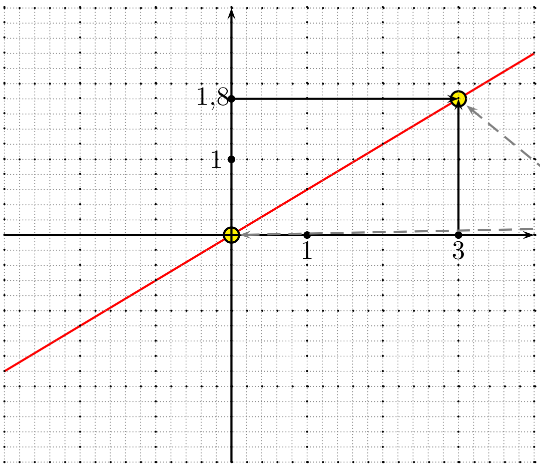
Donc la fonction f est $x \mapsto 2x + 2$.

IV. Représentations graphiques

1) Représentation graphique d'une fonction linéaire

> Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite passant par l'origine du repère.

Activité : 3 page 99.



Représenter graphiquement la fonction linéaire f de coefficient 0,6.

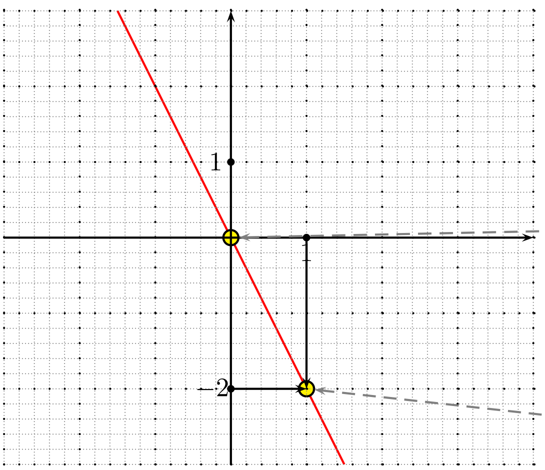
$$f : x \mapsto 0,6x$$

Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

x	0	3
$f(x)$	0	1,8

On prend $x = 3$: son image est $f(3) = 0,5 \times 3 = 1,8$. Je place le point de coordonnées $(3; 1,8)$.

> Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a. On dit alors que a est **le coefficient directeur** de la droite (d) et que $y = ax$ est une **équation de la droite** (d).



Représenter graphiquement la fonction linéaire g de coefficient -2.

$$f : x \mapsto -2x$$

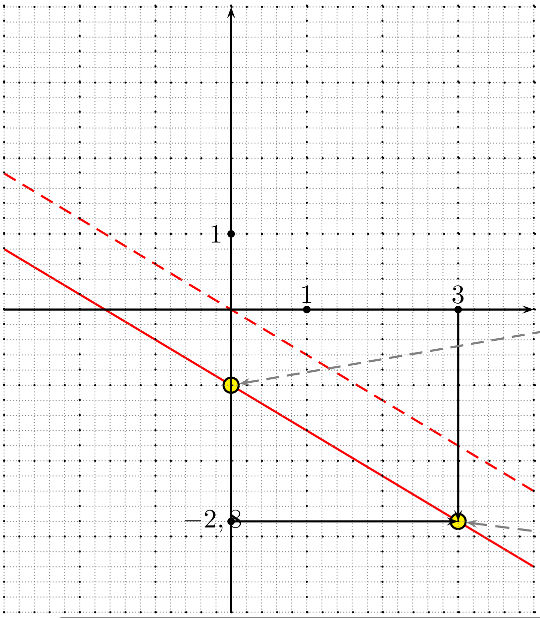
Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

x	0	1
$f(x)$	0	-2

On prend $x = 1$: son image est $g(1) = -2 \times 1 = -2$. Je place le point de coordonnées $(1; -2)$.

2) Représentation graphique d'une fonction linéaire

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite (d) :
- qui passe par le point B de coordonnées $(0; b)$;
- qui est parallèle à la droite (d') représentant la fonction linéaire associée.



Représenter graphiquement la fonction affine f définie par

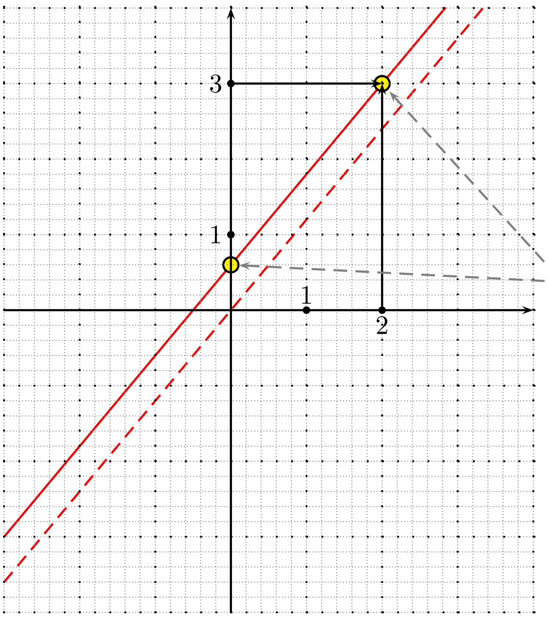
$$f : x \mapsto -0,6x-1$$

Comme f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'ordonnée à l'origine (0,-1)).

x	0	3
$f(x)$	-1	-2,8

On prend $x = 3$:
son image est $f(3) = -0,6 \times 3 - 1 = -1,8 - 1 = -2,8$.
Je place le point de coordonnées $(3; -2,8)$.

On dit que $y = ax+b$ est une équation de la droite (d) qui représente la fonction affine qui à x associe $ax + b$. On dit également que :
- b est l'ordonnée à l'origine,
- a est le coefficient directeur.



Représenter graphiquement la fonction affine g définie par

$$g : x \mapsto 1,2x+0,6$$

Comme g est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'ordonnée à l'origine (0,+0,6)).

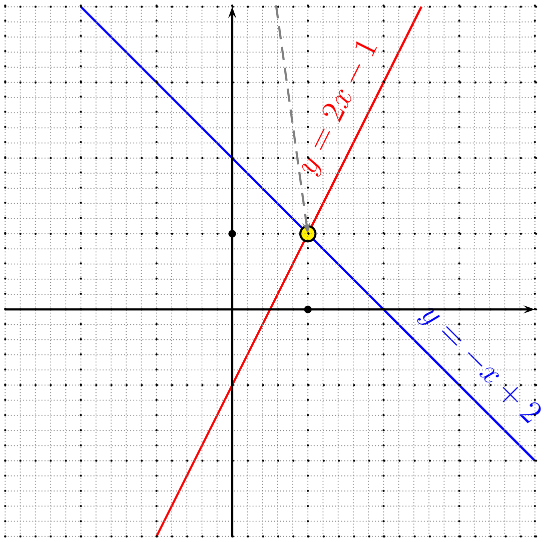
x	0	2
$g(x)$	1	3

On prend $x = 2$:
son image est $g(2) = 1,2 \times 2 + 0,6 = 2,4 + 0,6 = 3$. Je place le point de coordonnées $(2; 3)$.

V. Interprétation graphique d'un système de 2 équations du 1^{er} degré à 2 inconnues

Exemple : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x - y = -2 \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ et la solution est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites ; c'est à dire dans ce cas le couple $\underline{(1;1)}$.



Fiche méthode

I Fonctions linéaires

1. Fonctions

– Déterminer l'image d'un nombre par une fonction :
ex : soit $f : x \mapsto 4x$, l'image de -3 par f est $f(-3) = 4 \times (-3) = -12$;
l'image de -3 par f est donc -12.

– Déterminer l'expression d'une fonction linéaire à l'aide d'un nombre non nul et de son image :
ex : $g(2) = -4$, $a = 2$, $b = -4$, le coefficient est : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-4}{2} = 2$; donc $g(x) = -2x$.

– Déterminer l'expression d'une fonction à partir de sa représentation graphique :
il suffit de déterminer les coordonnées d'un point situé sur la représentation graphique ;
ex : si le point de coordonnées $(2; 5)$ appartient à la représentation graphique d'une fonction linéaire j, alors $j(2) = 5$, et on sait finir.

2. Représentation graphique

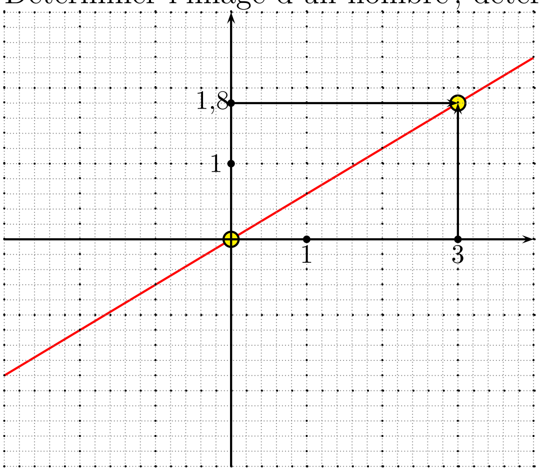
Rappel : la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine d'équation $y = ax$ où a est le coefficient de la fonction.

– Tracé d'une représentation graphique d'une fonction linéaire :
ex : il faut déterminer un point appartenant à la représentation graphique de la fonction (sachant que l'origine appartient à la représentation) :
h est définie par $h(x) = \dfrac{2}{3}x$; il faut **choisir** un nombre et calculer son image par h :

x	0	3
$f(x)$	0	2

Il est préférable de choisir des points de coordonnées entières (plus faciles à placer dans un graphique).

– Déterminer l'image d'un nombre ; déterminer un nombre ayant une image donnée :



L'image de 3 est 1,8 et le nombre dont l'image est 1,8 est 3.

Chapitre 9

Vecteurs

Sommaire

Programme 2004

Égalité vectorielle	Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D. Liez cette écriture vectorielle au parallélogramme $ABDC$ éventuellement aplati.	Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A, A'), (B, B'), (C, C')... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = ...$ L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. On mettra en évidence la caractérisation d'un égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide de milieux de $[AD]$ et $[BC]$: Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. Si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Composition de deux translations ; somme de deux vecteurs	Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations. Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.	Des activités de constructions conduiront à l'idée que la composée de deux translation est une translation. À partir de ce résultat, à établir ou admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle.
Composition de deux symétries centrales	Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation. Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.	Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle. On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation $2\overrightarrow{AB}$ pour désigner $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme, ainsi que la notation $\circ$ pour désigner la composée.

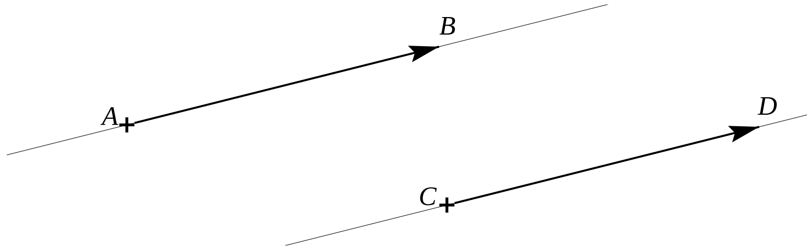
I. Translation et vecteur

Activité : 1 page 233

Définition :
Un vecteur est déterminé par sa direction, son sens et sa longueur.
Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$ est tel que l'origine et l'extrémité d'un représentant sont confondues.

II. Égalité de deux vecteurs

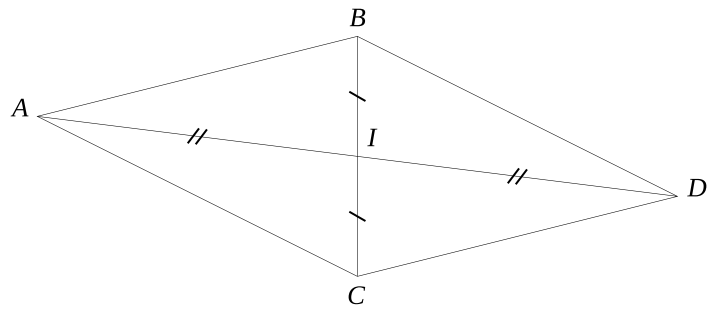
Définition :
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :
1. les droites (AB) et (CD) ont même direction (sont parallèles) ;
2. les demi-droites $[AB)$ et $[CD)$ ont même sens ;
3. les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont même longueur.



Exercices : 2 et 3 page 242.

Activité : 2 page 234

Propriétés



- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.
- Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- Si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.
- Si I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu de $[AB]$.

Exercices : 5, 6, 7 et 8 page 242 ; 56 et 57 page 248. 52 page 247 en DM.

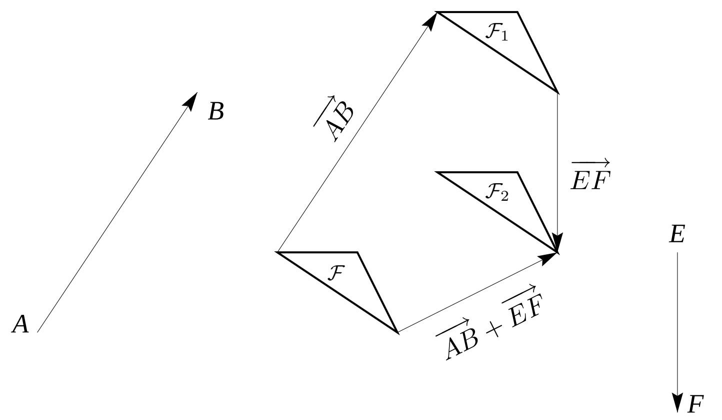
III. Somme de deux vecteurs

1) Composée de deux translations

Activité : 3 page 234 (1)

Propriété :

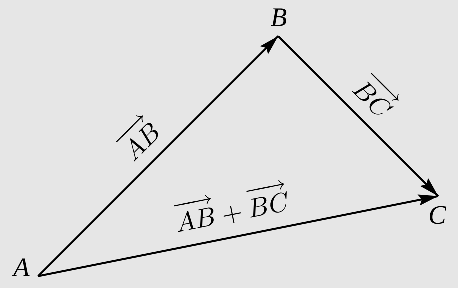
- Si $\mathcal{F}_1$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et si $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ alors la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$.



2) Relation de Chasles

Activité : 3 page 234 (2)

Soit A, B et C trois points. Alors $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.



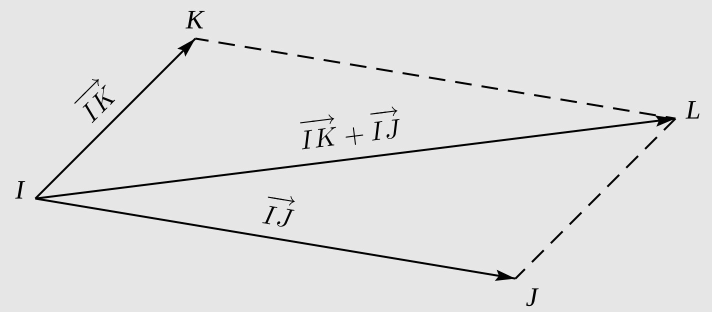
Remarque :
- L'extrémité du 1er vecteur est l'origine du 2e vecteur.
- On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Un tel vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé *vecteur nul* et se note $\overrightarrow{0}$.
- On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle *l'opposé* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et se note $-\overrightarrow{AB}$.

Exercices : 11, 12, 13 page 243.

3) Règle du parallélogramme

Activité : 3 page 234 (3)

Soit I, J et K trois points. Alors $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IL}$ où L est le point tel que $IJLK$ soit un parallélogramme.



Remarque Les vecteurs ont la même origine.

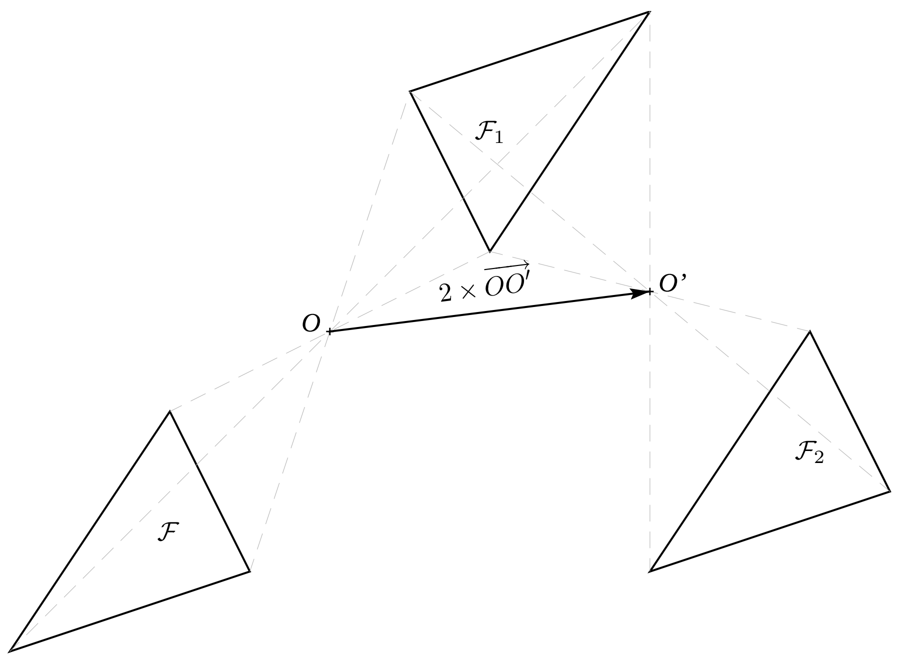
Exercices : 14, 17, 18 page 243.

IV. Composée de deux symétries centrales

Activité : 5 page 236

Propriété :

Si $\mathcal{F}_1$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre O et si $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la symétrie centrale de centre O' alors la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $2\times\overrightarrow{OO'}$.



Exercices : 39 et 40 page 245.

Exercices livre

8.1 Translation et vecteurs

☐ ☐ Activité 1 p 233

8.2 Égalité de vecteurs

☐ ☐ 2 p 242
☐ ☐ 3 p 242
☐ ☐ Activité 2 p 234
☐ ☐ 5 p 242
☐ ☐ 6 p 242
☐ ☐ 7 p 242
☐ ☐ 8 p 242
☐ ☐ 56 p 248
☐ ☐ 57 p 248
☐ ☐ 52 p 247 (DM)

8.3 Somme de deux vecteurs

8.3.1 Composée de deux translations

☐ ☐ Activité 3 p 234 (1)

8.3.2 Relation de Chasles

☐ ☐ Activité 3 p 234 (2)
☐ ☐ 11 p 243
☐ ☐ 12 p 243
☐ ☐ 13 p 243

8.3.3 Règle du parallélogramme

☐ ☐ Activité 3 p 234 (3)
☐ ☐ 14 p 243
☐ ☐ 17 p 243
☐ ☐ 18 p 243

8.4 Composée de deux symétries centrales

☐ ☐ Activité 5 p 236
☐ ☐ 39 p 245
☐ ☐ 40 p 245

V. Exercices

Exercice 1

1. Construis un quadrilatère $ABCD$ **quelconque**. On appelle O le centre de ce quadrilatère.
2. Construis les points I, J, K, L tels que

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \qquad \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$$

3. Précise la nature du quadrilatère $IJKL$.
4. Que peut-on dire de ce quadrilatère si
   (a) $AC = BD$?
   (b) $AC = BD$ et les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,cm$, $AC = 3,5\,cm$ et $\widehat{CAB} = 50^\circ$. Soit M un point du segment $[AC]$.

1. Contruis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BM}$ et le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BM}$.
2. Calcule la longueur EF.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $EMBA$? Justifie la réponse. Déduis-en ensuite la mesure de l'angle $\widehat{FEM}$.

Exercice 3

Soit un triangle ABC.

1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}$.
2. Construire le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
3. Démontrer que
   (a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$.
   (b) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.
   (c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
   (d) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CA}$.

Exercice 4

L'unité de longueur est le centimètre.

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$; $AC = 5$; $BC = 4$.

1/ Construis le triangle ABC en vraie grandeur.

2/ Construis le point M image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3/ (a) Construis le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
   (b) Que représente le point C pour le segment $[MN]$? Justifie.

Chapitre 10

Repère et coordonnées

Sommaire

Programme 2004

Coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère.	Lire sur un graphique les coordonnées d'un vecteur. Représenter, dans le plan muni d'un repère, un vecteur dont on donne les coordonnées. Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités de l'un quelconque de ses représentants. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Les coordonnées d'un vecteur seront introduites à partir de la composition de deux translations selon les axes.
Distance de deux points dans un repère orthonormé du plan.	Le plan étant muni d'un repère orthonormé, calculer la distance de deux points dont on donne les coordonnées.	Le calcul de la distance de deux points se fera en référence au théorème de Pythagore, de façon à visualiser ce que représentent différence des abscisses et différence des ordonnées.

I. Coordonnées d'un point

Deux axes gradués de même origine et perpendiculaires définissent *un repère orthogonal*.
De plus, si les axes possèdent la même unité de longueur alors le repère est dit *orthonormé ou orthonormal*.

Dans un repère quelconque, soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors les coordonnées du point K, milieu du segment $[AB]$ sont

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple :
Soit $A(3; 5)$ et $B(1; -3)$, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll} x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} & y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ x_K = \dfrac{3+1}{2} & y_K = \dfrac{5+(-3)}{2} \\ x_K = \dfrac{4}{2} & y_K = \dfrac{2}{2} \\ x_K = 2 & y_K = 1 \end{array}$$

Exercices : 34 et 37 page 245.

II. Coordonnées d'un vecteur

Activité : feuille

Dans un repère quelconque, soit E et F deux points de coordonnées respectives $(x_E; y_E)$ et $(x_F; y_F)$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont

$$(x_F - x_E\,;\, y_F - y_E)$$

Exemples
Sur la figure ci-dessus, on a

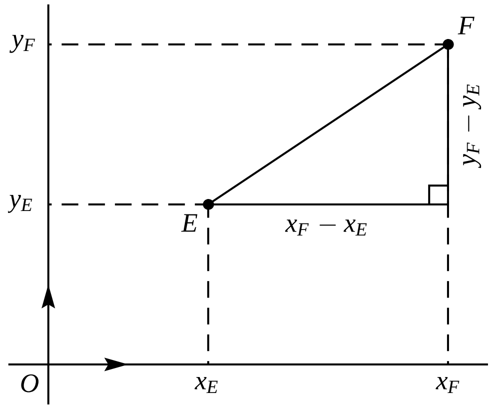
$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A) & \overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;\, y_C - y_D) \\ \overrightarrow{AB}(-3-0\,;\, -2-2) & \overrightarrow{DC}(-5-4\,;\, 0-(-1)) \\ \overrightarrow{AB}(-3\,;\, -4) & \overrightarrow{DC}(-9\,;\, 1) \end{array}$$

Vérification graphique :
Le déplacement rectiligne de A à B correspond graphiquement à un déplacement horizontal de 3 unités dans le sens négatif suivi d'un déplacement vertical de 4 unités dans le sens négatif.

Remarque :
Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

Exercices : 20, 22, 25 et 30 page 244 ; 60 page 248.

III. Distance dans un repère orthonormé



Dans **un repère orthonormé**, soit E et F deux points de coordonnées respectives $(x_E ; y_E)$ et $(x_F ; y_F)$. Alors, on a

$$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 \quad \text{et} \quad EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$

Exemples :

1. Soit $A(1; 2)$, $B(-3; -1)$, $C(-5; 4)$ et $D(3; -1)$, calculer AB et CD.
   Le repère est orthonormé, on a donc :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ AB^2 &= (-3-1)^2 + (-1-2)^2 \\ AB^2 &= (-4)^2 + (-3)^2 \\ AB^2 &= 16 + 9 \\ AB^2 &= 25 \\ AB &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} CD^2 &= (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 \\ CD^2 &= (3 - (-5))^2 + (-1-4)^2 \\ CD^2 &= (3+5)^2 + (-5)^2 \\ CD^2 &= 64 + 25 \\ CD^2 &= 89 \\ CD &= \sqrt{89} \end{aligned}$$

2. Soit $\overrightarrow{LM}(2; 3)$, calculer LM.
   Le repère est orthonormé, on a donc :

$$\begin{aligned} LM^2 &= 2^2 + 3^2 \\ LM^2 &= 4 + 9 \\ LM^2 &= 13 \\ LM &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Remarque :
Les réponses sont données dans l'unité de longueur commune aux deux axes.

Exercices : 61, 62 et 65 page 248.

IV. Exercices

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité choisie est le centimètre. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Placer les points $A(4;5)$, $B(0;-3)$ et $C(-6;0)$.
2. (a) Montrer que $AB = \sqrt{80}\,cm$, $AC = \sqrt{125}\,cm$ et $BC = \sqrt{45}\,cm$.
   (b) En déduire que ABC est un triangle rectangle. Préciser l'angle droit.
3. (a) Construis le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   (b) Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
   (c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
   (d) Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point D sont $(-2;8)$.
4. (a) Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$.
   (b) Que représente le point K pour le quadrilatère $ABCD$?

Exercice 2

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points $A(-4;3)$, $B(3;2)$ et $C(1;-2)$. L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

1. Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J) joint.
2. (a) Calculer la longueur AB.
   (b) On admet que le calcul donne $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
3. Soit H le milieu du segment $[BC]$. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées $(2;0)$.
4. Pourquoi le segment $[AH]$ est-il une hauteur du triangle ABC ?
5. (a) Prouver que $AH = 3\sqrt{5}$.
   (b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie B

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (a) Placer le point D.
   (b) Montrer par le calcul que D a pour coordonnées $(8;-3)$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$? Justifier.

Exercices livre

10.1 Coordonnées d'un point

☐ ☐ 34 p 245
☐ ☐ 37 p 245

10.2 Coordonnées d'un vecteur

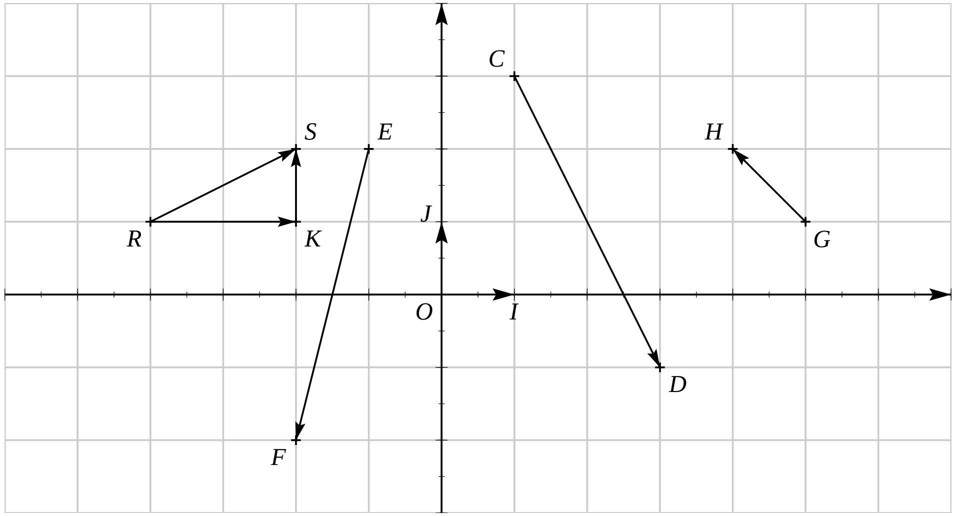
☐ ☐ Activité : cours
☐ ☐ 20 p 244
☐ ☐ 22 p 244
☐ ☐ 25 p 244
☐ ☐ 30 p 244
☐ ☐ 60 p 248

10.3 Distance dans un repère orthonormé

☐ ☐ 61 p 248
☐ ☐ 62 p 248
☐ ☐ 65 p 248

Activité : Coordonnées de vecteurs

Préliminaire



Pour aller de R à K, on effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{RK}$ ou graphiquement . . . .

On note ce déplacement $(2;0)$.

Pour aller de K à S, on effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{KS}$ ou graphiquement . . . .

On note ce déplacement $(0;1)$.

Pour aller de R à S, on effectue :

– Soit une translation de vecteur $\overrightarrow{RK}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{KS}$ c'est à dire graphiquement un déplacement $(2;0)$ suivi d'un déplacement $(0;1)$.
– Soit une translation de vecteur . . . . . . ou graphiquement un déplacement $(\ldots;\ldots)$.

> On dit que **les coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{RS}$ sont $(\ldots;\ldots)$.

Partie 1

1. Lis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.

   $\overrightarrow{CD}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ $\overrightarrow{GH}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ $\overrightarrow{EF}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

2. Place le point M tel que le vecteur $\overrightarrow{EM}$ ait pour coordonnées $(2;-4)$.
3. Lis graphiquement les coordonnées de E et de M.

   $E(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ $M(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

   Comment passe-t-on des coordonnées de E à celles de M ? . . . .
   . . . .
4. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EM}$? . . . .
   . . . .
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ECDM$? . . . .
   . . . .

Partie 2

1. Soit le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{CN}$ ait pour coordonnées $(15;-13)$. Calcule les coordonnées du point N.
   $C(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ donc $N(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.
2. Soit A le point de coordonnées $(x_A;y_A)$ et $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(a;b)$.
   (a) Quelles sont les coordonnées $(x_B;y_B)$ du point B ?
   $x_B = \ldots\ldots\ldots$ $y_B = \ldots\ldots\ldots$
   (b) Explique pourquoi $a = x_B - x_A$ et $b = y_B - y_A$.

> <u>Si</u> A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ <u>alors</u> le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

3. Soit A de coordonnées $(2,1)$ et B le point de coordonnées $(-3,-4)$. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis vérifie graphiquement en plaçant les points A et B dans le repère (O,I,J).
4. <u>Application :</u>
   Soit T le milieu du segment $[CD]$ qui a pour coordonnées $(x_T;y_T)$.
   Calculer x_T et y_T.
   On a $\overrightarrow{CT}(x_T - x_C;\ldots\ldots)$ et $\overrightarrow{TD}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.
   On connaît $C(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ et $D(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.
   Or $\overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$ donc

   . . . . = ... = ...
   . . . . = ... = ...
   . . . . = ... = ...
   . . . . = ... = ...

> . . . . = ... = ...

Placer le point T sur la figure au milieu de $[CD]$ et vérifier le résultat obtenu.

Chapitre 11

Statistiques

Sommaire

Programme 2004

		Il s'agit essentiellement d'une part , de faire acquérir aux élèves les premiers outils de comparaison de séries statistiques, d'autre part de les habituer à avoir une attitude de lecteurs responsables face aux informations de nature statistique.
Caractéristiques de position d'une série statistique.	Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.	On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulés, à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l'effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur médiane.
Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique.	Une série statistique étant donnée, déterminer son étendue ou celle d'une partie donnée de cette série.	L'étude de séries statistiques ayant même moyenne permettra l'approche de la notion de dispersion avant toute introduction d'indice de dispersion. On introduira l'étendue de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes. On pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion, ou en interprétant des représentations graphiques données.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique.		Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés.

Activité : feuille

I. Caractéristiques de position d'une série statistique

1) Moyenne d'une série statistique

- Série représentée en liste
  Une classe de 5^{e} a fait un contrôle de mathématiques. Voici la liste des notes obtenues : 8, 11, 5, 12, 2, 17, 7, 8, 19, 2, 10, 4, 7, 7, 11, 14, 7, 8, 12, 5, 10, 8, 5, 10, 11, 8, 12, 10, 14, 12.
  Si l'on veut calculer la moyenne de ce contrôle, on additionne les notes et on divise par le nombre de notes :

$$\frac{8+11+5+\ldots+10+14+12}{30}=\frac{276}{30}=9,2$$

- Série regroupée par valeurs dans un tableau
  On peut aussi regrouper ces nombres dans le tableau suivant selon les valeurs des notes obtenues :

Notes	2	4	5	7	8	10	11	12	14	17	19
Effectif	2	1	3	4	5	4	3	4	2	1	1

La moyenne est alors **une moyenne pondérée** par les effectifs ; on la calcule en multipliant chaque valeur par l'effectif correspondant, en faisant la somme de ces produits et en divisant par l'effectif total, soit :

$$\frac{2\times 2+4\times 1+5\times 3+\ldots+14\times 2+17\times 1+19\times 1}{30}=\frac{276}{30}=9,2$$

- Série regroupée par classe dans un tableau
  On peut enfin regrouper ces nombres en classes dans le tableau suivant :

Notes	$0\leqslant n<5$	$5\leqslant n<10$	$10\leqslant n<15$	$15\leqslant n\leqslant 20$	Total
centre de la classe	2,5	7,5	12,5	17,5	
Effectif	3	12	13	2	30

On considère alors que le centre de chaque classe représente la classe donc la moyenne de la série ainsi regroupée en classes est égale à :

$$\frac{2,5\times 3+7,5\times 12+12,5\times 13+17,5\times 2}{30}=\frac{295}{30}\approx 9,83$$

Remarques :
– La moyenne et la moyenne pondérée par les effectifs sont égales.
– Le regroupement en classes permet des calculs plus rapides mais ne permet pas d'obtenir la valeur exacte de la moyenne.

2) Médiane d'une série statistique

La **médiane** $\mathcal{M}$ d'une série statistique est la valeur qui partage le groupe étudié en deux sous-groupes de même effectif chacun tels que :
– tous les éléments du premier groupe on des valeurs inférieures ou égales à $\mathcal{M}$;
– tous les éléments du deuxième groupe ont des valeurs supérieures ou égales à $\mathcal{M}$.

Application :

- **Détermination de la médiane d'une série statistique**
  - **A partir d'un tableau d'effectifs cumulés ou de fréquences cumulées**

Exemple :

Sur une population de 75 feuilles de platane, on étudie la longueur en mm de la grande nervure. On obtient le tableau statistique suivant :

Longueurs	102	112	122	132	142	152	162	172	182
Effectif	1	6	6	10	13	19	10	8	2
Effectif cumulé croissant	1	7	13	23	36	55	65	73	75

Les feuilles étant rangées par longueurs croissantes, la case grisée indique que de la 37[e] à la 55[e], les feuilles ont pour longueur $152\,mm$.

Or $75 = 37 + 1 + 37$ donc la médiane est la longueur de la 38[e] feuille c'est-à-dire $152\,mm$.

$$\begin{array}{llllllllll} \text{Rang :} & 1^{re} & 2^e & \dots & 36^e & 37^e & 38^e & 39^e & \dots & 75^e \\ \text{Longueur :} & 102 & \multicolumn{4}{l}{\underbrace{112 \quad \dots \quad 142 \quad 152}_{37 \text{ feuilles}}} & 152 & \multicolumn{3}{l}{\underbrace{152 \quad \dots \quad 182}_{37 \text{ feuilles}}} \end{array}$$

D'autre part, la longueur moyenne de ces feuilles est de :

$$m = \frac{102 \times 1 + 112 \times 6 + 122 \times 6 + 132 \times 10 + 142 \times 13 + 152 \times 19 + 162 \times 10 + 172 \times 8 + 182 \times 2}{75}$$

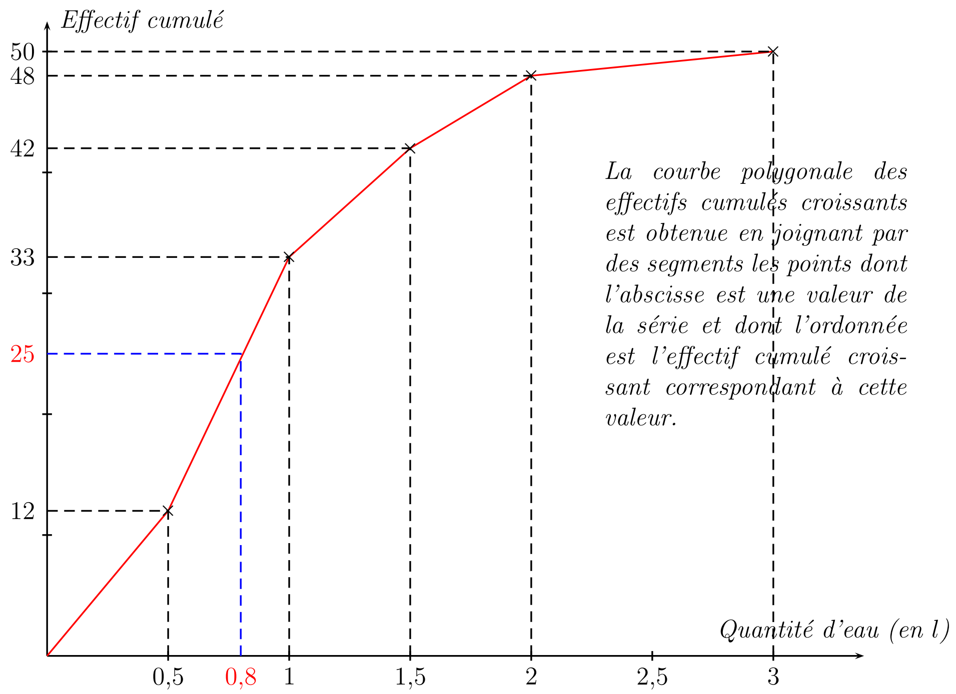
$$m = \frac{10920}{75}$$

$$m = 145,6\,mm$$

donc la médiane et la moyenne sont (en général) **différentes**.

  - **A partir d'une représentation graphique**

Une valeur approchée de la médiane peut être obtenue à l'aide de la courbe polygonale des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes) en lisant la valeur correspondant à la moitié de l'effectif total (ou à une fréquence cumulée égale à 50%). A la question "Quelle quantité d'eau buvez-vous par jour ?", les 50 personnes interrogées ont donné des réponses qui ont permis de tracer le polygone des effectifs cumulés croissants suivant :



$\mathcal{M}$ est environ égal à $0,8\,l$: en effet, la moitié des personnes interrogées consomme moins de $0,8\,l$ par jour (ou la moitié des personnes interrogées consomme plus de $0,8\,l$ par jour).

Exercices : 1, 2, 4 et 5 page 160 ; 9 et 11 page 161, 35 page 166.

II. Une caractéristique de dispersion : l'étendue

L'étendue d'une série statistique est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite valeur prises par cette série. Elle mesure la « dispersion » de cette série.

Les critères de dispersion indiquent de quelle façon les valeurs du caractère sont groupées (plus ou moins resserrées) autour des valeurs « centrales » : l'étendue est le plus simple de ces paramètres.
En général, lorsque l'étendue est élevée, la dispersion est grande.
Exemple : pour la série avec les platanes, l'étendue est de $182 - 102 = 80$ mm.

Exercices : 15 page 162 ; 20 page 163 ; 39 page 167 ; 47 page 169 ; 48 page 170.

Exercices livre

☐ ☐ Activité : feuille

11.1 Caractéristiques de position d'une série statistique

11.1.1 Moyenne d'une série statistique

11.1.2 Médiane d'une série statistique

☐ ☐ 1 p 160
☐ ☐ 2 p 160
☐ ☐ 4 p 160
☐ ☐ 5 p 160
☐ ☐ 9 p 160
☐ ☐ 11 p 160
☐ ☐ 35 p 165

11.2 Une caractéristique de dispersion : l'étendue

☐ ☐ 15 p 162
☐ ☐ 20 p 163
☐ ☐ 39 p 167
☐ ☐ 47 p 169
☐ ☐ 48 p 170

Recherche

☐ ☐ 34 p 166
☐ ☐ 35 p 166

Activité : Statistiques

• Voici les résultats de la classe de 3N au premier contrôle de Mathématiques.

$10 - 14 - 10 - 18 - 18 - 3 - 12 - 12 - 12 - 1 - 4 - 9,5 - 1 - 6 - 8 - 6 - 8 - 12 - 4 - 6 - 1 - 2 - 9 - 14 - 12$

1. Combien y-avait-t-il d'élèves présents ? ....
....
2. Complète le tableau suivant.

Note	01	02	03	04	06	08	09	09,5	10	12	14	18
Effectifs	3	1										
Effectifs Cumulés Croissants												

3. Rappelle la formule permettant de calculer la fréquence d'une valeur du caractère et complète le tableau

$$f = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Note	01	02	03	04	06	08	09	09,5	10	12	14	18
Fréquence en %												

• Voici les résultats de la classe de 3N au deuxième contrôle de Mathématiques.

$4 - 15 - 8 - 20 - 12 - 3 - 10 - 12 - 8,5 - 4 - 4 - 9 - 0 - 7 - 8,5 - 7 - 7 - 0 - 6 - 6 - 12 - 17 - 7 - 17$

1. Combien y-avait-t-il d'élèves présents ? ....
....
2. Complète le tableau suivant.

Note	00	03	04	06	07	08	08,5	09	10	12	15	17	20
Effectifs													
Effectifs Cumulés Croissants													
Fréquence en %													

Caractéristiques de position

La moyenne d'une série statistique

1. Calcule la moyenne du premier contrôle.

$$M_1 = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$M_1 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$M_1 = \ldots$$

2. Calcule la moyenne du deuxième contrôle.

$$M_2 = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$M_2 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$M_2 = \ldots$$

Que remarque-t-on ? ....
....

La médiane d'une série statistique

1. Dans le premier devoir, on remarque que 12 élèves ont obtenu une note strictement inférieure à 9 et 12 élèves ont obtenu une note strictementsupérieure à 9.

   9 s'appelle **la médiane** de la série.
2. Dans le deuxième devoir, on remarque que 12 élèves ont obtenu une note inférieure à ... et 12 élèves ont obtenu une note supérieure à ....

   Dans ce cas, ...
   ....

Les valeurs du caractère étant rangées par *ordre croissant* (ou *décroissant*), **la médiane** d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la série en deux parties de même effectif.

Caractéristique de dispersion

Quelle est, pour le premier devoir, la différence entre la plus grande note et la plus petite note ? ....
Quelle est, pour le deuxième devoir, la différence entre la plus grande note et la plus petite note ? ....

On appelle **étendue** d'une série statistique, la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère.

Exemple

On étudie la durée d'utilisation de 20 ordinateurs et on obtient le tableau suivant :

Durée d'utilisation (années)	Effectif
$[0;2[$	2
$[2;4[$	3
$[4;6[$	8
$[6;8[$	7

Calcule la moyenne, la médiane et l'étendue de cette série statistique.

1. Moyenne : ....
....
....
2. Médiane : ....
....
3. Étendue : ....
....

Rotation

Programme 2004

Images de figures par une rotation.	Construire l'image d'une figure par une rotation donnée d'un point, d'un cercle, d'une droite, d'un segment et d'une demi-droite.	Les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires). Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction. Dans des pavages, on rencontrera des figures invariantes par rotation. Les configurations rencontrées permettent d'utiliser les connaissances sur les cercles, les tangentes, le calcul trigonométrique...
Polygones réguliers.	Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet.	Les activités sur les polygones réguliers, notamment leur tracé à partir d'un côté, porteront sur le triangle équilatéral ou un carré, l'hexagone et éventuellement l'octogone. Certaines d'entre elles pourront conduire à utiliser la propriété de l'angle inscrit. Les activités de recherche de transformations laissant invariant un triangle ou un carré sont l'occasion de revenir sur les transformations étudiées au collège.

Chapitre 13

Interrogations

Interrogation n°1

Nom : 12 Septembre 2006

Développer, puis réduire les expressions suivantes :

$A = (x+3)^2$

$B = (x-2)^2$

$C = (x+8)(x-8)$

$D = (3x-2)^2$

$E = \left(\frac{2}{3} + x\right)^2$

Interrogation n°1

Nom : 12 Septembre 2006

Développer, puis réduire les expressions suivantes :

$A = (x+2)^2$

$B = (x-3)^2$

$C = (x+6)(x-6)$

$D = (2x-3)^2$

$E = \left(\frac{4}{3} + x\right)^2$

Interrogation n°2

Nom : 18 Septembre 2006

Factoriser les expressions suivantes :
$A = (x+3)(x-7) - 3(x+3)$

$B = 3x^2 + 7x$

$C = (x+1)(x-1) + (x-1)$

$D = (3x+2)(x-2) + 3x + 2$

$E = 3(x+1)(2x-1) + (x-7)(2x-1)$

Interrogation n°2

Nom : 18 Septembre 2006

Factoriser les expressions suivantes :
$A = (x+4)(x-5) + 2(x+4)$

$B = 4x^2 - 7x$

$C = (x+1)(x-2) + (x+1)$

$D = (2x+3)(x-2) + 2x + 3$

$E = 3(x+1)(2x-1) + (x-7)(2x-1)$

Interrogation n°3

20 Septembre 2006

EXERCICE 1 :

Soit l'expression $E = (3x+2)^2 - (x+3)(3x+2)$

1. Développer puis réduire E.
2. Calculer la valeur de E pour $x = 2$ avec la forme développée.
3. Factoriser E.
4. Calculer la valeur de E pour $x = 1$ avec la forme factorisée.
5. *Bonus :* Résoudre l'équation $E = 0$.

EXERCICE 2 :

Factoriser, si possible, au maximum les expressions suivantes :

$F = x^2 - 6x + 9$

$G = 4x^2 - 25$

$H = (4x-3)(x+7) - (2x+1)(4x-3)$

$I = 16x^2 - 22x + 9$

$J = (2x+7)^2 - (x-2)^2$

Interrogation n°3

20 Septembre 2006

EXERCICE 1 :

Soit l'expression $E = (3x-2)^2 - (x+3)(3x-2)$

1. Développer puis réduire E.
2. Calculer la valeur de E pour $x = 2$ avec la forme développée.
3. Factoriser E.
4. Calculer la valeur de E pour $x = 1$ avec la forme factorisée.
5. *Bonus :* Résoudre l'équation $E = 0$.

EXERCICE 2 :

Factoriser, si possible, au maximum les expressions suivantes :

$F = x^2 - 8x + 16$

$G = 9x^2 - 36$

$H = (4x+3)(x+7) - (2x+1)(4x+3)$

$I = 9x^2 - 22x + 16$

$J = (2x+6)^2 - (x-2)^2$

EXERCICE 1 :

1. $E=(3x)^2+2\times 3x\times 2+2^2-(x\times 3x+x\times 2+3\times 3x+3\times 2)$
   $E=9x^2+12x+4-(3x^2+2x+9x+6)$
   $E=9x^2+12x+4-(3x^2+11x+6)$
   $E=9x^2+12x+4-3x^2-11x-6$
   $E=6x^2+x-2$
2. $E=6\times 2^2+2-2=6\times 4=24$
3. $E=\underline{(3x+2)}\times(3x+2)-(x+3)\underline{(3x+2)}$
   $E=(3x+2)\times[(3x+2)-(x+3)]$
   $E=(3x+2)\times[3x+2-x-3]$
   $E=(3x+2)(2x-1)$
4. $E=(3+2)(2-1)=5\times 1=5$
5. $(3x+2)(2x-1)=0$
   C'est une équation produit, donc :
   $3x+2=0$ ou $2x-1=0$
   $3x=-2$ ou $2x=1$
   $x=-\dfrac{2}{3}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$
   $S=\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$

EXERCICE 2 :

$F=(x-3)^2$
$G=(2x-5)(2x+5)$
$H=(4x-3)\,[(x+7)-(2x+1)]=(4x-3)(-x+6)$
I n'est pas factorisable.
$J=[(2x+7)-(x-2)][(2x+7)+(x-2)]=(2x+7-x+2)(2x+7+x-2)=(x+9)(3x+5)$

EXERCICE 1 :

1. $E=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2-(x\times 3x+x\times(-2)+3\times 3x+3\times(-2))$
   $E=9x^2-12x+4-(3x^2-2x+9x-6)$
   $E=9x^2-12x+4-(3x^2+7x-6)$
   $E=9x^2-12x+4-3x^2-7x+6$
   $E=6x^2-19x+10$
2. $E=6\times 2^2-19\times 2+10=6\times 4-38+10=24-38+10=-4$
3. $E=\underline{(3x-2)}\times(3x-2)-(x+3)\underline{(3x-2)}$
   $E=(3x-2)\times[(3x-2)-(x+3)]$
   $E=(3x-2)\times[3x-2-x-3]$
   $E=(3x-2)(2x-5)$
4. $E=(3-2)(2-5)=1\times(-3)=-3$
5. $(3x-2)(2x-5)=0$
   C'est une équation produit, donc :
   $3x-2=0$ ou $2x-5=0$
   $3x=2$ ou $2x=5$
   $x=\dfrac{2}{3}$ ou $x=\dfrac{5}{2}$
   $S=\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{2}\right\}$

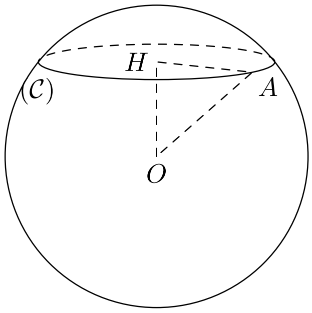
EXERCICE 2 :

$F=(x-4)^2$
$G=(3x-6)(3x+6)$
$H=(4x+3)\,[(x+7)-(2x+1)]=(4x+3)(-x+6)$
I n'est pas factorisable.
$J=[(2x+6)-(x-2)][(2x+6)+(x-2)]=(2x+6-x+2)(2x+6+x-2)=(x+8)(3x+4)$

Interrogation n° 4

3e

27 Novembre 2006



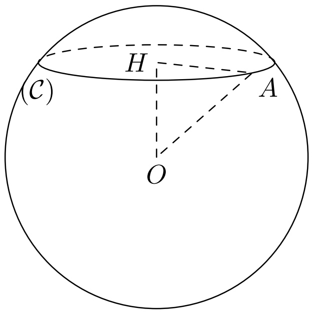
Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre O. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H. Le rayon de la sphère est $5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle OHA en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la section à $1\,mm$ près.
3. Calculer le volume de la boule au cm^3 près.
4. Calculer la surface de la sphère au cm^2 près.

Interrogation n° 4

3e

27 Novembre 2006



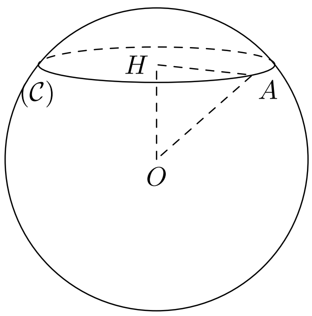
Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre O. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H. Le rayon de la sphère est $5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle OHA en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la section à $1\,mm$ près.
3. Calculer le volume de la boule au cm^3 près.
4. Calculer la surface de la sphère au cm^2 près.

Interrogation n° 4

3e

27 Novembre 2006



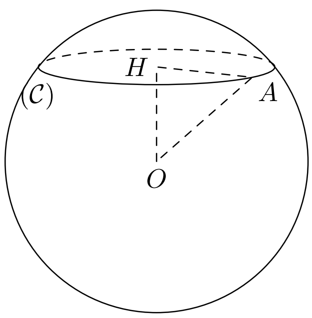
Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre O. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H. Le rayon de la sphère est $5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle OHA en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la section à $1\,mm$ près.
3. Calculer le volume de la boule au cm^3 près.
4. Calculer la surface de la sphère au cm^2 près.

Interrogation n° 4

3e

27 Novembre 2006



Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre O. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre H. Le rayon de la sphère est $5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle OHA en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la section à $1\,mm$ près.
3. Calculer le volume de la boule au cm^3 près.
4. Calculer la surface de la sphère au cm^2 près.

Chapitre 14

Devoirs surveillés

Sommaire

Contrôle n°1 sujet A

3^e 25 Septembre 2006

Exercice 1 :

1. Écrire les trois égalités remarquables.
2. Calculer astucieusement : $M = 102 \times 98$

Exercice 2 :

Développer et réduire les expressions :

$G = (x-4)^2$

$H = \left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}\right)$

$I = (2x-3)(4x+7)$

$J = (2x-4)(2x-5) - 5(x+1)$

Exercice 3 :

Factoriser au maximum :

$A = 9x^2 - 16$

$B = (4x+7)(3x-2) + (3x-2)(5x+3)$

$C = (x+2)^2 - 5(x+2)$

$D = x^2 + 6x + 9$

$E = (7x-2)(2+x) + (7x-2)$

Exercice 4 :

On donne l'expression suivante :

$F = (3x-5)^2 - (8x+1)(3x-5)$

1. Développer et réduire K.
2. Factoriser F.
3. Résoudre l'équation $(3x-5)(-5x-6) = 0$
4. Calculer F pour $x = -3$.

Exercice 5 :

Résoudre l'équation $(2x-4)(2x+6) = 0$.

Barème possible : ex 1 (4pts), ex 2 (4pts), ex 3 (5pts), ex 4 (5,5pts), ex 5 (1,5pts)

Contrôle n°1 sujet B

3^e 25 Septembre 2006

Exercice 1 :

1. Écrire les trois égalités remarquables.
2. Calculer astucieusement : $M = 97 \times 103$

Exercice 2 :

Développer et réduire les expressions :

$G = (2x-7)^2$

$H = (7x-3)(2x+5)$

$I = \left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}\right)$

$J = (3x-5)(2x-4) - 5(x-1)$

Exercice 3 :

Factoriser au maximum :

$A = (4x+7)(3x-2) + (5x-3)(4x+7)$

$B = 4x^2 - 25$

$C = (x+5)^2 - 3(x+5)$

$D = x^2 - 8x + 16$

$E = (7x-2)(2+x) + (7x-2)$

Exercice 4 :

On donne l'expression suivante :

$F = (5x-3)^2 - (7x+2)(5x-3)$

1. Développer et réduire F.
2. Factoriser F.
3. Résoudre l'équation $(5x-3)(-2x-5) = 0$.
4. Calculer F pour $x = -3$.

Exercice 5 :

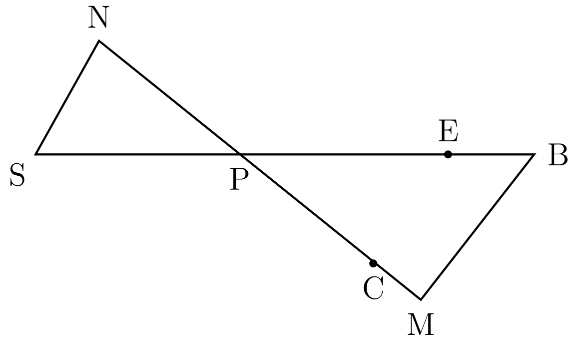
Résoudre l'équation $(3x-6)(2x+4) = 0$.

Barème possible : ex 1 (4pts), ex 2 (4pts), ex 3 (5pts), ex 4 (5,5pts), ex 5 (1,5pts)

Contrôle n°2

3^{e} 4 Octobre 2006

Exercice 1 :



La figure ci-contre n'est pas réalisée en vraie grandeur.
Les points S, P, E et B sont alignés ainsi que les points N, P, C et M.
Les droites (MB) et (NS) sont parallèles.
PM = 12 cm, MB = 6,4 cm, PB = 13,6 cm et PN = 9 cm.

1. Démontrer que le triangle PBM est rectangle.
2. Calculer la longueur NS.
3. On considère le point E du segment [PB] tel que PE = 3,4 cm et le point C du segment [PM] tel que PC = 3 cm. Les droites (CE) et (MB) sont-elles parallèles ?

Exercice 2 :

Antoine et David ont tendu une corde entre deux points A et D. Charlène et Betty en ont fait de même entre les points B et C.
Les deux cordes se coupent en E.
On sait que EA = 7, EB = 13, EC = 10 et ED = 9,8.
Les droites (AC) et (BD) sont-elles paralléles ? Justifier la réponse.

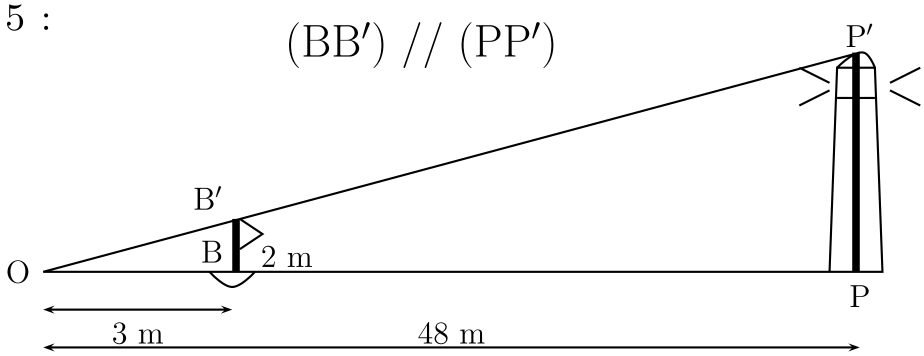
Exercice 3 :

1. Construire un triangle RST rectangle en R tel que ST = 8 cm et RT = 4,8 cm.
2. Montrer par un calcul que RS = 6,4 cm.
3. Sur la demi-droite [RT), placer le point U tel que : RU = 6 cm. Sur la demi-droite [RS), placer le point V tel que : RV = 8 cm.
   (a) Montrer que les droites (TS) et (UV) sont parallèles.
   (b) Calculer UV.

Exercice 4 :

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] (BC=10 cm) et de centre O. Placer un point A tel que AB=6 cm. et A$\in \mathcal{C}$.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
3. Calculer AC.

Exercice 5 :



Un touriste veut connaître la hauteur du phare de la pointe Vénus situé dans la commune de Mahina. Pour cela, il met à l'eau une bouée B, munie d'un drapeau d'une hauteur BB′ de 2m. Puis, il s'en éloigne jusqu'à ce que la hauteur du drapeau semble être la même que celle du phare. Le touriste se trouve alors au point O. La figure ci-dessus représente la situation à cet instant.
Calculer la hauteur PP′ du phare.

Contrôle n°3

3^e 20 novembre 2006

Nom: **Prénom:**

Exercice 1 :

1. Résous les équations suivantes :

   a. $4x + 2 = 7x - 3$

   b. $3x - 2 = \dfrac{2}{5}\ x + 11$

2. Résous les inéquations suivantes :

   a. $3x - 2 > -2x + 18$

   b. $4x - 6 \leqslant x - 2$

3. Résous les 2 systèmes d'équations suivants :

   a. En utilisant la méthode de substitution :
   $$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

   b. En utilisant la méthode de combinaison :
   $$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

$A = (x-2)^2 + (x+1)(x-2)$

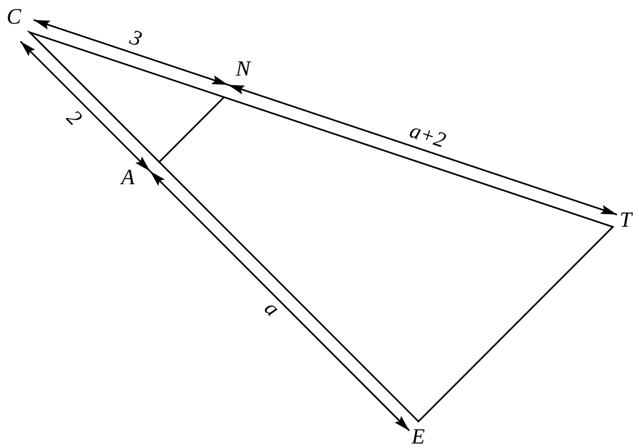
1. Développe A.
2. Factorise A.
3. Résous $A = 0$.
4. Question subsidiaire : résous $A = 2x^2$.

Exercice 3 :

Anne achète 5 polos identiques et 6 shorts identiques dans un magasin pour une somme de 41,5 € .
Dans ce même magasin, Gwenaël achète 2 polos et 5 shorts identiques à ceux d'Anne pour 27 € .
Détermine le prix d'un polo ainsi que le prix d'un short.

Exercice 4 :

Sur la figure ci-dessous, a est un nombre positif ; la droite (AN) est parallèle à la droite (ET).
Détermine a.



Exercice 5 :

Un fournisseur d'accès à internet offre 2 tarifs :
Tarif A : 2€ par mois de forfait puis 1,5€ de l'heure.
Tarif B : 15 € par mois de forfait puis 0,7 € de l'heure.
A partir de combien d'heures le tarif B est-il le plus avantageux ?

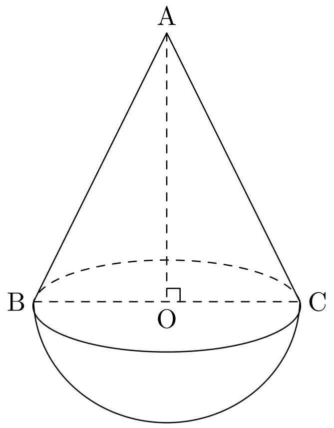
Barème :

Exercice 1 : 5 pts Exercice 2 : 3+1 pts Exercice 3 : 4 pts Exercice 4 : 4 pts Exercice 5 : 4 pts

CONTRÔLE N°4

3e — 6 Décembre 2006

EXERCICE 1 :



La balise ci-contre est formée d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A.
Le segment $[BC]$ est un diamètre de la base du cône et le point O est le centre de cette base.
On donne $AO = BC = 6$ dm.

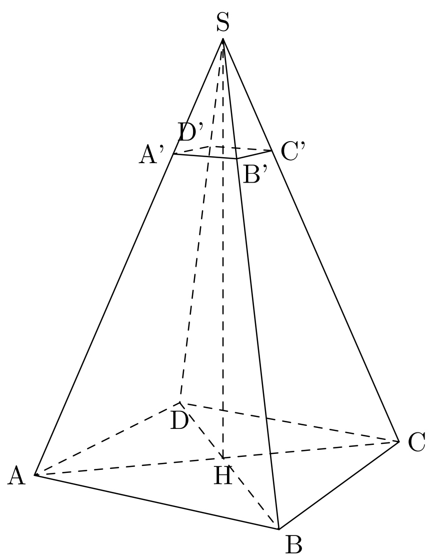
1. Montrer que $AB = 3\sqrt{5}$ dm.
2. Dans cette question, on se propose de calculer des volumes.
   (a) Calculer en fonction de π le volume du cône (on donnera la valeur exacte de ce volume).
   (b) Calculer en fonction de π le volume de la demi-boule (on donnera la valeur exacte de ce volume).
   (c) Calculer la valeur exacte du volume de la balise, puis en donner la valeur arrondie à 0,1 dm^3 près.

EXERCICE 2 :

On considère une sphère de centre O et de rayon 6 cm.

1. Écrire l'aire de la sphère et en donner un arrondi au mm^2.
2. On note O' un point tel que $OO' = 4$ cm. (P) est le plan passant par le point O' et perpendiculaire à la droite (OO'). On note M un point appartenant au plan (P) et à la sphère.
   (a) Calculer $O'M$.
   (b) Tracer en vraie grandeur le triangle $OO'M$.
   (c) Tracer en vraie grandeur l'intersection de la sphère et du plan.

EXERCICE 3 :



Sur la figure ci-contre, $SABCD$ est une pyramide à base rectangulaire, de hauteur $[SH]$, où H est le centre du rectangle $ABCD$.
On donne $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm et $SH = 12$ cm.

1. Calculer AC ; en déduire AH.
2. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
3. Démontrer que $SA = 13$ cm.
4. On note A' le point de $[SA]$ tel que $SA' = 3,25$ cm. On coupe la pyramide par le plan parallèle à la base et passant par A'. On obtient une petite pyramide $SA'B'C'D'$.
   (a) Calculer le coefficient de réduction de $SA'B'C'D'$ par rapport à $SABCD$.
   (b) En déduire le volume de $SA'B'C'D'$.
5. Où aurait-il fallu placer A' pour obtenir une pyramide dont le volume est huit fois plus petit que celui de la pyramide $SABCD$? Justifier.

Barême possible : Ex1 : 6pts, Ex 2 :6 pts, Ex 3 : 8 pts

Contrôle n°5

3e — 10 Janvier 2007

Nom: **Prénom:**

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont à faire sur le sujet.

Exercice 1 :

Parmi les nombres suivants, entourer les nombres positifs, souligner les nombres négatifs et barrer les écritures impossibles.

$\sqrt{-17}$ $\sqrt{\pi - 3}$ $-\sqrt{17}$ $\sqrt{1+\frac{3}{4}}$

$\sqrt{2-\pi}$ $\sqrt{2}\times(-\sqrt{3})$ $(-4\sqrt{5})^3$ $-2\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

Exercice 2 :

1. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers, b le plus petit possible :
   $\sqrt{18} =$ $\sqrt{72} =$ $\sqrt{50} =$
   $\sqrt{24} =$ $\sqrt{96} =$ $\sqrt{54} =$
2. Déduire-en une écriture simplifiée des expressions suivantes :
   $A = 4\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$ $B = \sqrt{24} - \sqrt{96} + 3\sqrt{54}$

Exercice 3 :

Développer et simplifier :

$E = (3 + 2\sqrt{5})^2$ $F = (2\sqrt{3} - 5)(2 - \sqrt{3})$ $G = (\sqrt{3} - 5)(\sqrt{3} + 5)$

Exercice 4 :

Résoudre les équations suivantes :

$x^2 = 7$ $x^2 = -8$ $x^2 + 16 = 0$ $x^2 - 3 = 6$

Exercice 5 :

On considère les deux expressions suivantes : $C = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$ et $D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

1. Mettre C sous la forme $a\sqrt{6}$ avec a entier relatif.
2. Développer et réduire D.

Exercice 6 :

Soit $F = (2x + 2)^2 - 9$.

1. Développer et réduire F.
2. Résoudre l'équation $F = 0$.

Brevet blanc n°1

24 Janvier 2007

La qualité et la précision de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront prises en compte dans l'évaluation. Calculatrice autorisée

Activités numériques : 12 points

Exercice 1 :

On considère l'expression F suivante : $F = (7x-8)(-x+4)-(7x-8)^2$.

1. Développer et réduire F.
2. Factoriser F.
3. Résoudre l'équation $(7x-8)(-8x+12)=0$.

Exercice 2 :

1. Effectuer les calculs de A et de B ; donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible en justifiant les calculs :

$$A = \frac{15}{14} - \frac{6}{7} \times \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad B = \frac{1-\dfrac{7}{18}}{\dfrac{7}{9}}$$

2. Effectuer les calculs de C et D donner le résultat sous la forme d'un produit d'un entier et d'une puissance de dix :

$$C = \frac{3\times 10^6 \times 6 \times 10^5}{15 \times 10^7} \quad \text{et} \quad D = \frac{3\times 10^6 + 6 \times 10^5}{15\times 10^7}$$

3. Donner E sous la forme $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ où a et b sont deux entiers relatifs, en justifiant les calculs :

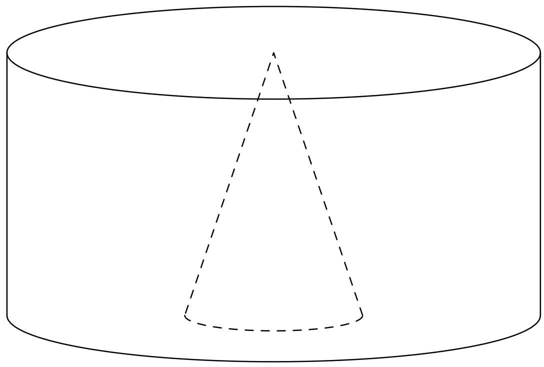
$$E = 5\sqrt{8} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{18}$$

Exercice 3 :

1. (a) 60 est-il solution de l'inéquation $2,5x - 75 > 76$?
   (b) Résoudre l'inéquation et représenter les solutions sur un axe.
   Hachurer la partie de l'axe qui ne correspond pas aux solutions.
2. Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € par semaine pour faire, en moyenne, 150 glaces.
   Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces, au minimum, dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?
   On expliquera la démarche.

Activités géométriques : 12 points

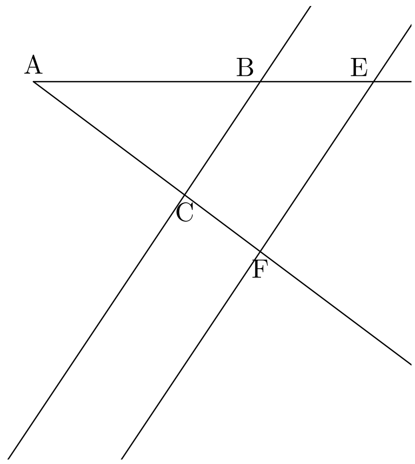
Exercice 1 :



On considère un cylindre en bois de diamètre 12 cm et de hauteur 18 cm.

1. Exprimer le volume du cylindre en fonction de π.
2. On creuse dans ce cylindre un cône de rayon 4 cm et de hauteur 18 cm. Montrer que, en cm^3, la valeur exacte de la partie restante est 552π.
3. Quelle fraction du volume du cylindre le volume restant représente-t-il ? Exprimer cette fraction en pourcentage ; l'arrondir au dixième.

Exercice 2 :



La figure n'est pas faite en vraie grandeur. Elle n'est pas à reproduire.
ABC est un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6,4$ cm et $BC = 4,9$ cm.
Le point E appartient à la demi-droite $[AB)$ et $AE = 12$ cm.
Le point F appartient à la demi-droite $[AC)$ et $AF = 9,6$ cm.

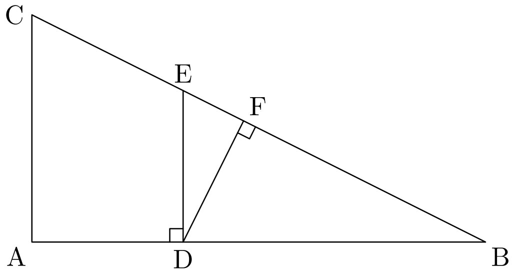
1. Le triangle ABC est-il un triangle rectangle Justifier la réponse.
2. Les droites (BC) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercice 3 :

1. Tracer un segment $[EF]$ de 10 cm de longueur puis un demi-cercle de diamètre $[EF]$.
   Placer le point G sur ce demi-cercle, tel que $EG = 9$ cm.
   (a) Démontrer que le triangle EFG est rectangle.
   (b) Calculer la longueur GF arrondie au mm.
2. Placer le point M sur le segment $[EG]$ tel que $EM = 5,4$ cm et le point P sur le segment $[EF]$ tel que $EP = 6$ cm.
   Démontrer que les droites (FG) et (MP) sont parallèles.

Problème : 12 points

Une course à pied est organisée dans un collège. Un plan est distribué aux élèves à l'avance mais les parcours sont inconnus :



- Le plan n'est pas à l'échelle.
- Départ et arrivée de chaque circuit au point D.
- Les chemins possibles sont le long des segments tracés sur le plan.
- $AB = 400$ m ; $AC = 300$ m ; $BC = 500$ m ; $ED = 180$ m.
- $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DFB}$ sont des angles droits.
- circuit 6$^{\text{e}}$: 432 m ; circuit 5$^{\text{e}}$: 576 m ; circuit 4$^{\text{e}}$: 720 m ; circuit 3$^{\text{e}}$: 840 m.

Tristan qui est en 3$^{\text{e}}$ fait équipe avec Cynthia, une élève de 5$^{\text{e}}$.

Dans tout le problème, les longueurs doivent être données au mètre près et les angles au degré près. Les résultats de plusieurs questions sont donnés, vous pouvez donc les utiliser dans les questions suivantes même si vous n'avez pas réussi à les démontrer.

Première partie

On donne à Tristan le questionnaire ci-dessous afin de l'aider à trouver son circuit et celui de Cynthia. Ce questionnaire rapporte des points à l'équipe.

Rédiger les réponses à ce questionnaire :

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) En déduire que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.
2. (a) Calculer les longueurs BD et BE.
   (b) En déduire que $AD = 160$ m et $CE = 200$ m.
3. (a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, à 1 degré près.
   (b) En déduire que $FB = 192$ m et $FD = 144$ m.
4. Calculer les longueurs des circuits suivants :
   (a) $DECAD$;
   (b) $DBFD$.

Deuxième partie

Cynthia a un circuit de 576 m et doit en faire x tours.

Tristan a un circuit de 840 m et doit en faire y tours.

Pour trouver leurs nombres de tours Tristan a droit deux indices :

(1) « À vous deux, vous allez faire 5 928 m » ;

(2) « À vous deux, vous allez faire 8 tours ».

1. Écrire un système d'équation traduisant ces deux indices.
2. Résoudre ce système pour trouver le nombre de tours que chacun doit faire.

Activités numériques : 12 points

Exercice 1 :

1. Developpement classique, attention au signe $-$ devant la parenthèse.
2. Le résultat de la factorisation se retrouve dans la question suivante...
3. Équation produit.

Exercice 2 :

1. Calculs classiques, attention aux priorités de calculs.
2. Pour le C, pas de difficulté, pour le D, attention, il y a une somme au numérateur.
3. Décomposition des racines avant le calcul final.

Exercice 3 :

1. (a) Test de l'inégalité, il se révele faux.
   (b) Résolution classique de l'inéquation.
2. Soit x le nombre de glaces, on obtient l'inéquation traitée dans la question précédente...

Activités géométriques : 12 points

Exercice 1 :

1. Formule du cours, attention, il faut determiner le rayon.
2. Formule du cours, attention, il faut determiner le rayon.
3. $\dfrac{\text{Volume restant}}{\text{Voume initial}} \times 100$

Exercice 2 :

1. Contraposée du théorème de Pythagore, attention aux calculs séparés.
2. Réciproque du théorème de Thalès, attention aux calculs séparés et aux résultats ! Pas de valeurs approchées !!!

Exercice 3 :

1. (a) Triangle inscrit dans un cercle....
   (b) Théorème de Pythagore.
2. Réciproque du théorème de Thalès.

Problème : 12 points

Première partie

1. (a) Réciproque du théorème de Pythagore.
   (b) Si 2 droites sont perpendiculaires.... sans oublier les données et la conclusion.
2. (a) Théorème de Thalès, attention au "sommet principal" qui est B...
   (b) Calcul niveau CP, une soustraction.
3. (a) Formule de trigonométrie, au choix.
   (b) Plusieurs méthodes, pour BF : cosinus, pour FD : théorème de Pythagore.
4. (a) Calcul niveau CP, une addition.
   (b) Calcul niveau CP, une soustraction.

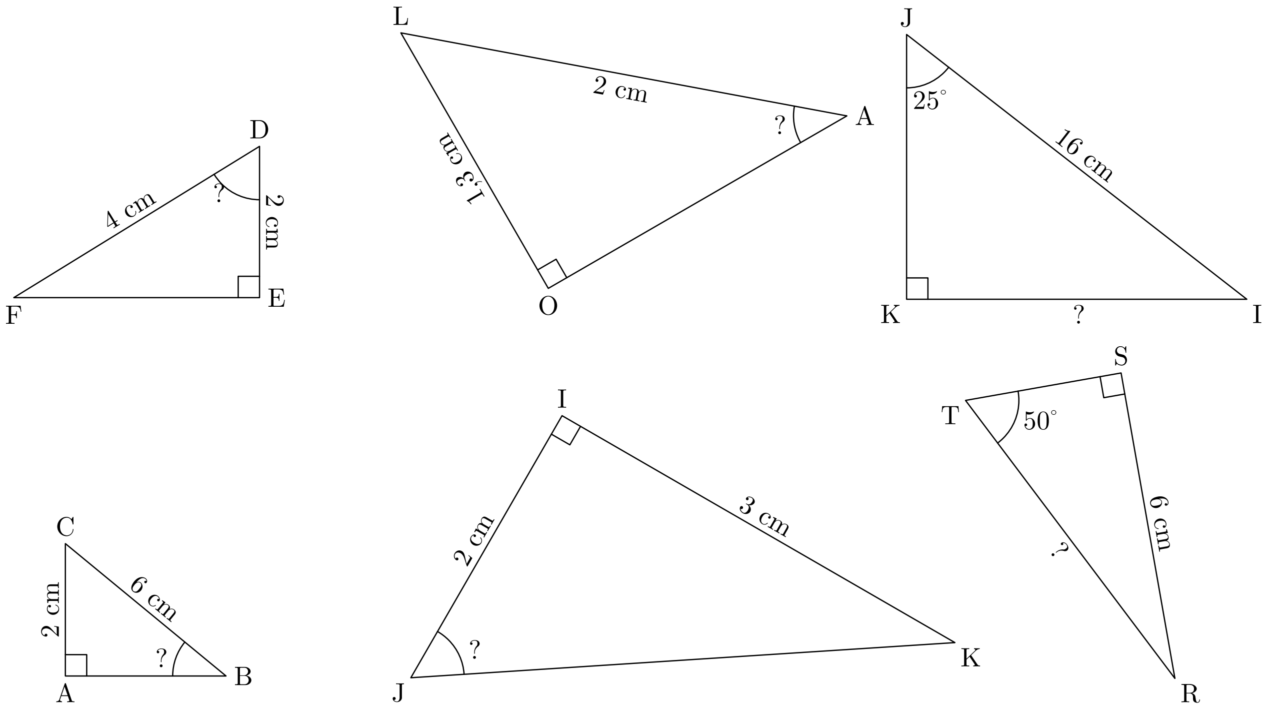
Deuxième partie

1. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 576x + 840y = 5928 \end{cases}$
2. Soit x le nombre de tour réalisés par Cynthia et y le nombre de tour réalisés par Tristan. On obtient le système précédent, on le résout. Attention, on trouve un nombre entier de tours.

Contrôle n°7

3^{e} 27 Février 2007

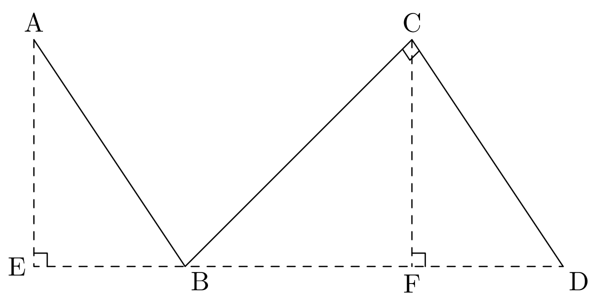
Exercice 1 :



Exercice 2 :
Soit α (se lit « alpha ») un angle aigu tel que $\sin \alpha = \dfrac{1}{2}$.

1. (a) Calcule $\cos \alpha$.
   (b) Calcule $\tan \alpha$.
   (c) Calcule la mesure de l'angle α.
2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = \alpha$.
   (a) Calcule BC.
   (b) Calcule AB.

Exercice 3 :



Une ligne de haute tension alimente deux transformateurs A et D en passant par B et C. Voici un plan vu de dessus de cette ligne où l'angle $\widehat{EAB}$ mesure 45 degrés et l'angle $\widehat{EDC}$ mesure quant à lui 50 degrés. Les distances AE et CF sont égales et mesurent 30 mètres.

1. Calcule une valeur approchée de la longueur du fil nécessaire.
2. Si la configuration du terrain le permettait, quelle économie de fil ferait-on en reliant directement A à D ?

Exercice 4 :

Soit un cercle de centre O dont $[BC]$ est un diamètre. Une corde $[AD]$ coupe le segment $[BC]$ en I.
On a $\widehat{BAD} = 25^\circ$ et $\widehat{ACB} = 50^\circ$.
Détermine les mesures des angles des triangles ABC ; ABD ; IBD et ACD.

Barême possible : Ex 1 : 6 pts ; Ex 2 : 4,5 pts ; Ex 3 : 4,5 pts ; Ex 4 : 5 pts

Contrôle n°8

3e | 12 Mars 2007

Exercice 1 :

Dire si les nombres x et y sont premiers entre eux.

1. $x = 143$ et $y = 85$.
2. $x = 5148$ et $y = 1386$.
3. $x = 2735$ et $y = 2734$.
4. $x = 13457891$ et $y = 27542713$.

Exercice 2 :

Rendre les fractions suivantes irréductibles à l'aide de l'algorithme d'Euclide, si nécessaire.

1. $\dfrac{2587}{254}$
2. $\dfrac{1633}{1065}$
3. $\dfrac{475234}{12345678}$

Exercice 3 :

Dire que deux nombres entiers naturels a et b sont *amis* (ou amicaux) signifie que la somme des diviseurs propres de a (c'est-à-dire les diviseurs de a différents de a) est égale à b et que la somme des diviseurs propres de b est égale à a.
Vérifier que les nombres 220 et 284 sont amis.

Exercice 4 :

Une grossiste en fleurs a reçu un lot de 5 815 tulipes et 3 489 roses. Elle veut réaliser des bouquets tous identiques, composés de roses et de tulipes, en utilisant toutes les fleurs.

1. Quel nombre maximal de bouquets peut-elle composer ?
2. Une rose est vendue 1,80 € ; une tulipe est vendue 0,90 €.
   Combien sera vendu l'un de ces bouquets ?

Exercice 5 :

1. Calculer le PGCD de 385 et 231.
2. Un parc rectangulaire de 385 m de long et de 231 m de large doit être bordé d'arbustes. Le jardinier souhaite que tous ces arbustes soient espacés régulièrement avec un arbuste à chaque coin du parc.
   (a) Sachant que la distance séparant deux arbustes doit être un nombre entier de mètres, quelles sont les différentes possibilités d'espacement des arbustes ?
   (b) Dans chaque cas, déterminer le nombre d'arbustes nécessaires.

Exercice 6 :

Montrer que 2 nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

Barême possible : Ex 1 : 4,5 pts, Ex 2 : 3,5 pts, Ex 3 : 3 pts, Ex 4 : 3 pts, Ex 5 : 4 pts, Ex 6 : 2 pts

Contrôle n°9

3e 28 Mars 2007

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction affine telle que :

1. l'image de 3 est 5 et l'image de 4 est 7 ;
2. $g(4) = \frac{1}{3}$ et $g(2) = 1$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction linéaire définie pour tout x par $f(x) = 2x$ et g la fonction affine définie pour tout nombre x par $g(x) = -3x + 4$.

1. Quelle est l'image de 5 par f et g ?
2. Quel est le nombre dont l'image est 0 par f et g ?

Exercice 3 :

On considère un rectangle de longueur L et de largeur ℓ. On décide d'augmenter la longueur de 10% et de diminuer la largeur de 10%. Le but de cet exercice est de déterminer la variation en pourcentage de son aire.

1. On considère un rectangle de côté 5 cm et 7 cm. Calculer son aire, puis calculer son aire après transformation.
2. A l'aide d'un tableau de proportionnalité, en considérant que l'aire de départ correspond à 100% de l'aire du triangle, déterminer la variation en pourcentage de l'aire du rectangle.
3. Déterminer la variation en pourcentage dans le cas général.

Exercice 4 :

Dans un magasin, une cartouche d'encre pour imprimante coûte 15 €. Sur un site internet, cette même cartouche coûte 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 € quel que soit le nombre de cartouches achetées.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	14
Prix à payer en magasin en euros		75		
Prix à payer par internet en euros		90		

2. Le nombre de cartouches achetées est noté x.
   (a) On note P_A le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. Exprimer P_A en fonction de x.
   (b) On note P_B le prix à payer, en comptant la livraison, pour l'achat de x cartouches par internet. Exprimer P_B en fonction de x.
3. Dans un repère orthogonal, que l'on rendra avec la copie, tracer les droites (d) et (d') définies par :
   - d représente la fonction $x \longmapsto 15x$
   - d' représente la fonction $x \longmapsto 10x + 40$
4. En utilisant le graphique précédent :
   (a) déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de 6 cartouches. Vous laisserez apparents les traits de constructions.
   (b) Sonia dispose de 80 euros pour acheter des cartouches. Est-il est plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou sur internet ? Vous laisserez apparents les traits de constructions.
5. Déterminer, graphiquement, puis par le calcul, à partir de quel nombre de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui du magasin.

Barême possible : Ex 1 : 3 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 3,5 pts, Ex 4 : 9,5 pts

Chapitre 15

Devoirs maisons

Sommaire

Initiation aux fractales

Voyez vous un quelconque rapport entre un chou fleur, les côtes de Bretagne, la surface de la lune ou les cours de la bourse ? Difficile ?

Partie 1

Tous ces objets sont pourtant utilisés par des mathématiciens pour étudier et expliquer des courbes ou des surfaces étranges appelées fractales.
1. Rechercher le mot *fractale* dans une encyclopédie ou un dictionnaire et par la même occasion établir une biographie succincte sur un mathématicien célèbre : Benoît Mandelbrot, le père de nombreuses fractales.
2. Au CDI, vous pourrez, sur Internet, afficher de belles fractales en couleur. Là encore, il faudra chercher un peu. (Joindre au devoir une copie accompagnée d'un petit texte sera très apprécié.)

Partie 2

Mais passons aux choses sérieuses avec cette petite introduction modeste que nous devons à
Mr Van Koch : Le flocon de neige.

1. Sur une belle feuille de papier blanche A4, construire un segment de 162 mm. Le partager en trois segments de même longueur . Le segment du milieu va vous servir maintenant de base pour construire un triangle équilatéral. Gommez ce segment qui vous a servi de base, vous avez sous vos yeux une ligne brisée de 4 segments.
Divisez de nouveau chaque segment en trois. Sur chaque segment du milieu construisez à nouveau un triangle équilatéral. Effacez tous les segments du milieu. Vous venez d'obtenir une "courbe" fractale d'ordre 2. Il ne vous reste plus qu'à recommencer le même processus : diviser chaque segment en trois puis sur le petit segment du milieu construire un triangle équilatéral ... Vous aurez sous les yeux la courbe d'ordre 3. Ce serait maintenant trop long de réaliser l'étape suivante.
2. Vous avez maintenant compris le procédé. Je vous propose de recommencer la même chose en partant d'un grand triangle équilatéral de côté 162 mm et donc de faire la même construction sur chaque côté. Vous obtiendrez un magnifique flocon de neige.
3. Pour terminer, il serait intéressant de se pencher sur le périmètre de chaque courbe, à chaque stade de son évolution. Vous pourrez le faire en complétant le petit tableau suivant :

Stade du flocon	Nombre de côtés	Longueurs d'un côté en mm	Périmètre du flocon en mm
0	3	162	486
1			
2			
3			
4 (non construit)			

Deux questions se posent alors :

1. Comment va évoluer le périmètre de la courbe du flocon de neige quand on va continuer sa construction : "à l'infini" ?
2. La surface enfermée dans cette courbe n'est pas infinie puisqu'elle ne sort pas de la feuille de papier. Mais alors peut-on calculer son aire ?
   Vous pouvez répondre à la première question. Pour la seconde, il faudra attendre quelques années. Patience...

Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Première partie : Contraposée d'une propriété

On a déjà rencontré, dans certains cas, la contraposée d'une propriété (exemple : dans un triangle de plus grand côté $[AB]$, si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle, qui est la contraposée du théorème de Pythagore). La contraposée d'une propriété 1 est une autre propriété 2 dont les conditions sont la négation des conclusions de la propriété 1 et les conclusions sont la négation des conditions de la propriété 1.

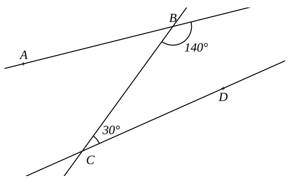
Exemple :
Propriété 1 :
Si $\underbrace{\text{un nombre est divisible par dix}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il se termine par 0}}_{\text{conclusion}}$.
Propriété 2 :
Si $\underbrace{\text{un nombre ne se termine pas par 0}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il n'est pas divisible par dix}}_{\text{conclusion}}$.
Remarque :
1. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
2. La négation de **et** est **ou** et inversement.

Attention !!! : Ne pas confondre contraposée et réciproque.

Donner les réciproques et contraposées des propriétés suivantes, puis dire si elles sont vraies :
1. Si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont sécantes.
2. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
3. Si j'ai deux chemises alors j'ai au moins une chemise.

Deuxième partie : Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une méthode pour démontrer.



Principe :
On veut montrer que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1. On suppose quelque chose de faux dans l'énoncé.	Dans notre exemple, on suppose que (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Au cours de la démonstration, on constate une contradiction.	(AB) et (CD) sont parallèles, donc les angles alternes internes qu'elles forment avec la droite (BC) ont même mesure, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. De plus $\widehat{ABC} = 180 - 140 = 40^\circ$. $\widehat{BCD} = 30^\circ$. Donc $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$.
3. S'il y a une contradiction, cela veut dire que l'énoncé est faux (ou qu'on a fait une erreur, mais ce n'est pas le sujet...).	On constate que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, ce qui est contradictoire, donc la supposition est fausse donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Troisième partie : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ semble avoir été découverte par les pythagoriciens (disciples de Pythagore). La démonstration proposée est très voisine de celle d'Euclide dans son ouvrage intitulé *Éléments*.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fraction **irréductible** $\dfrac{p}{q}$ telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers.

1. Expliquer pourquoi alors $p^2 = 2q^2$.
2. Montrer que si p est pair alors p^2 est pair.
3. Donner la contraposée de cette propriété.
4. Montrer que si p est impair alors p^2 est impair.
5. Donner la contraposée de cette propriété.
6. Le nombre $2q^2$ est-il pair ou impair ? Justifier que p est pair.
7. Posons $p = 2p'$.
   Expliquer pourquoi : $q^2 = 2p'^2$. En déduire que q est pair.
8. On sait que p est pair et que $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. En déduire que q est impair.
9. Où est la contradiction ?
10. Conclure.

Nombre d'or

0. Le nombre d'or

Faire des recherches sur ce nombre (succinctes et abordables).

1. L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (E)

1. Montrer que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de (E).
2. Calculer une valeur approchée de ϕ à 10^{-3} près.

2. Suite de Fibonacci

Première partie

La suite de nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ est une suite de nombres bien connue. C'est une suite de nombres de 1^{er} terme 1, de 2^{e} terme 2, etc...
Il existe bien d'autres suites de nombres, par exemple :

1. La suite de nombres $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
   Déterminer les 6^{e} et 7^{e} termes.
2. La suite de nombres $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$
   Déterminer les 6^{e} et 7^{e} termes.
3. La suite de nombres $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$
   Déterminer les 6^{e} et 7^{e} termes.

Deuxième partie

Parmi toutes ces suites, il y en a une un peu plus intéressante : la suite de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

1. On calcule un terme en additionnant les deux termes précédents.
   Déterminer les 10^{e} et 11^{e} termes.

2. Calcul des rapports de termes consécutifs (le plus grand au numérateur) :
   $\dfrac{1}{1} = \ldots \quad \dfrac{2}{1} = \ldots \quad \dfrac{3}{2} = \ldots \quad \dfrac{5}{3} = \ldots \quad \dfrac{8}{5} = \ldots$
   Calculer ces rapports (on donnera une valeur approchée à 10^{-3} si nécessaire), puis calculer les rapports suivants (en s'arrêtant au rapport de numérateur 89).

3. Que remarque-t-on ?

3. Fraction continue

$$A = 1 + \cfrac{1}{1+1} \qquad B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}$$

$$C = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} \qquad D = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}$$

$$E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}} \qquad F = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}}}$$

1. Calculer et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles les nombres A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = 1 + \dfrac{1}{A}$, $C = 1 + \dfrac{1}{B}$...) .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de A, B, C, D, E et F.
3. Quelle remarque peut-on faire ?

4. Racines imbriquées

$$A = \sqrt{1+\sqrt{1}} \qquad B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

$$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \qquad D = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$$

$$E = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} \qquad F = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}$$

1. Calculer A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = \sqrt{1+A}$, $C = \sqrt{1+B}$...), on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. Quelle remarque peut-on faire ?

5. Pentagone régulier

Première partie

1. Tracer un cercle de centre O, de rayon 10 cm sur une feuille blanche (de dessin).
   Tracer un rayon $[OA]$.
   Placer le point B sur le cercle tel que $\widehat{AOB} = 72^\circ$.
   De même, placer le point $C (\neq A)$ sur le cercle tel que $\widehat{BOC} = 72^\circ$.
   En utilisant le même principe, placer D et E.
   On obtient ainsi un pentagone régulier $ABCDE$ (5 côtés et 5 angles de même mesure).

2. Mesurer AC, puis CD. Calculer $\dfrac{AC}{CD}$ (à 10^{-3} près).
   Que remarque-t-on ?
   On supposera par la suite que $\dfrac{AC}{CD} = \phi \quad \left(= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ pour rappel} \right)$.

Deuxième partie

1. Calculer $\widehat{COA}$.
2. Calculer $\widehat{CAO}$. En déduire $\widehat{ACO}$.
3. Calculer $\widehat{OCD}$.
4. Soit A' le milieu de $[CD]$, montrer que le triangle $OA'C$ est rectangle en A'.
5. Calculer $\widehat{COA'}$, puis $\widehat{A'OA}$, en déduire que A, O et A' sont alignés.
6. Calculer $\widehat{ACA'}$.
7. En remarquant que $\dfrac{DC}{AC} = 2 \times \dfrac{A'C}{AC}$, calculer la valeur exacte de $\dfrac{A'C}{AC}$ (penser que $\dfrac{DC}{AC}$ est l'inverse de $\dfrac{AC}{DC}$).
8. En déduire une valeur exacte de $\cos 72^\circ$.

6. Nombre d'or dans la vie de tous les jours

Faire des recherches sur le théâtre d'Épidaure, sur les tournesols (en rapport avec la suite de Fibonacci).
Trouver d'autres éléments en relation avec ce nombre.

Résolution d'équations du type ax^2+bx+c (avec $a\neq 0$)

On sait factoriser les expressions du type ax^2+bx+c (avec $a\neq 0$) dans certaines conditions.
Il existe d'autres méthodes (plus complètes) pour déterminer si une expression de ce type est factorisable et pour la factoriser le cas échéant. On va déterminer cette méthode.

1. Montrer que $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$ (1).
   (On pourra développer puis réduire l'expression de droite pour arriver à l'expression de gauche.)
2. • On sait factoriser les expressions du type A^2-B^2.
   • On sait aussi qui si un nombre n est positif alors on peut l'écrire comme le carré d'un nombre : $(\sqrt{n})^2=n$; alors que si n est négatif on ne le peut pas.
   Dans la deuxième expression de l'égalité (1), il faut s'intéresser à la partie $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.
3. Si $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)<0$ alors on ne peut pas l'écrire comme étant le carré d'un nombre, on ne sait pas factoriser l'expression dans ce cas.
4. Par contre, si $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$, alors $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=\left[\sqrt{\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right]^2$.
5. Ce cas est intéressant car, en posant :
   $A=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ et $B=\sqrt{\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$, l'expression de droite de l'égalité (1) devient $a(A^2-B^2)$!
   $$a(A^2-B^2)=a(A-B)(A+B)$$
6. Tout suivi ? Alors on peut appliquer la méthode.

   <u>Exemple 1 :</u> Factoriser, si possible, x^2-3x+2.

   • $a=1$, $b=-3$ et $c=2$. (Il faut calculer $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, pour déterminer le signe de $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.)
   • $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\dfrac{(-3)^2-4(1)(2)}{4(1)^2}=\dfrac{9-8}{4}=\dfrac{1}{4}>0$, on peut donc factoriser cette expression.
   • $A=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=\left(x+\dfrac{-3}{2\times 1}\right)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ et $B=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$
   • $x^2-3x+2=1\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\right]\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]$
   $x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{4}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{2}\right)$
   $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

   <u>Exemple 2 :</u> Factoriser, si possible, x^2-x+2.

   • $a=1$, $b=-1$ et $c=2$.
   • $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\dfrac{(-1)^2-4(1)(2)}{4(1)^2}=\dfrac{1-8}{4}=\dfrac{-7}{4}<0$, on ne peut pas factoriser cette expression (d'après 3.).
7. Factoriser, si possible, $4x^2-4x-3$.
8. Factoriser, si possible, x^2-2x-2.
9. Factoriser, si possible, $3x^2-4x+2$.

Pythagore de Samos et Thalès de Milet

Vie, activités et époque

1. Faites un bref résumé de la vie de Thalès et Pythagore. Vous devrez au minimum rechercher : A quelles époques ont-ils vécu ? Où sont-ils nés, où sont-ils morts ? Se sont-ils connus ? Quelles étaient leurs activités ? Quels étaient les différents voyages qu'aurait fait Pythagore ?
2. Pythagore aurait participé à une manifestation sportive. Laquelle et dans quelle discipline ?

Légendes et anecdotes

1. Thalès aurait mesuré la hauteur d'une pyramide célèbre. Laquelle et comment aurait-il fait ? Retrouvez une citation célèbre de Thalès qui accompagne cette histoire.
2. Trouvez au moins deux autres anecdotes concernant Thalès.
3. Retrouvez l'anecdote qui explique l'étymologie du mot « hécatombe ».

Thalès, Pythagore et l'astronomie

1. Thalès et Pythagore ont défendu l'héliocentrisme. Qu'est-ce que c'est ? Cette théorie fort juste fut pourtant invalidée. Par quoi et par qui ? Le monde fut plongé dans l'erreur pendant 2000 ans. Qui nous ramena à l'héliocentrisme ?
2. Une légende raconte que Thalès fit une prédiction astronomique. Laquelle ?

Thalès, Pythagore et la géométrie

1. Énoncez le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore.
2. Les deux théorèmes célèbres qui leurs sont attribués étaient déjà connus avant eux. Par qui et de quelle manière ?
3. Recherchez au moins 4 autres propriétés ou théorèmes qui leur sont attribués et que vous avez étudiés en classe.

La Fraternité Pythagoricienne

1. Qu'était la Fraternité Pythagoricienne et qu'y faisait-on ? Quel est son fondement ?
2. Quel était son Symbole ? Dessinez avec application ce symbole.
3. Donnez une définition simple de : nombre entier - nombre décimal - nombre rationnel - nombre irrationnel.
4. Qui est Hippase de Métaponte ? Qu'a-t-il découvert ? Comment est-il mort ?

Quelques liens :

- M@ths et tiques : http ://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php ?IDD=45
- Math 93 : http ://www.math93.com/
- IREM DE POITIERS : http ://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/

Cliquer sur Ressources, puis sur Histoire des mathématiques, puis sur 4e, puis choisir Théorème de Thalès ou Théorème de Pythagore et cliquer sur Histoires et anecdotes.

- ChronoMath : http ://www.chronomath.com/
- Biographie de Thalès :

http ://www.ac-creteil.fr/Colleges/93/jmoulinmontreuil/mathematiques/biographies/thal%E8s/Thales.html

- BibM@th : http ://www.bibmath.net/

Cliquer sur Références, puis sur Biographies et choisir Thalès ou Pythagore.

- Pythagore et les pythagoriciens : http ://villemin.gerard.free.fr/Esprit/Pythagor.htm
- Histoire : http ://membres.lycos.fr/serge/Histoire_maths.html
- L'encyclopédie de l'Agora : http ://agora.qc.ca/mot.nsf/Dossiers/Pythagore

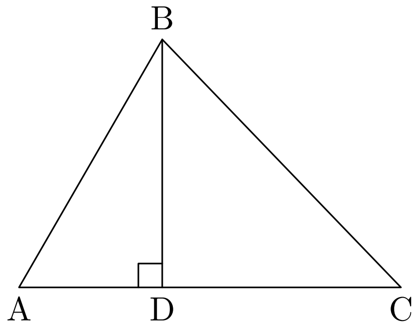
Théorème d'Al-Kashi

Première partie : Préliminaires

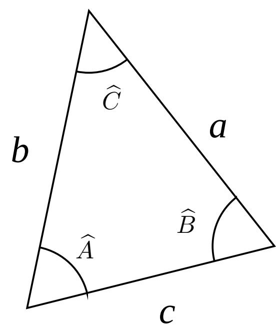
1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6\,cm$, $AC = 8\,cm$ et $\widehat{A} = 60^\circ$.
2. Tracer la hauteur issue de B, elle coupe $[AC]$ en D.
3. Calculer AD.
4. En déduire CD.
5. Calculer BD (on donne $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).
6. Calculer BC, puis en donner une valeur approchée au mm, et vérifier le résultat graphiquement.

Deuxième partie : Démonstration du théorème d'Al-Kashi

1. Montrer que $AD = AB \times \cos \widehat{BAC}$ (penser que $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$).
2. Exprimer CD en fonction de AC, AB et $\widehat{BAC}$
3. Montrer que $BD = AB \times \sin \widehat{BAC}$.
4. Exprimer BC^2 en fonction de BD^2 et de CD^2, puis en fonction de AB^2 , AC^2 et $\cos \widehat{BAC}$.
5. En identifiant $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, modifier le résultat précédent. La relation obtenue est l'une des trois relations formant le théorème d'Al-Kashi.



Troisième partie : Énoncé du théorème



Soit un triangle tels que a, b et c sont ses trois côtés et tels que $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont, respectivement, les angles opposés à a, b et c, alors :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \widehat{A}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos \widehat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \widehat{C}$

Le théorème d'al-Kashi est également connu sous le nom de théorème de Pythagore généralisé, car le théorème de Pythagore en est un cas particulier : lorsque l'angle $\widehat{A}$ est droit, autrement dit lorsque $\cos \widehat{A} = 0$, le théorème d'Al-Kashi s'écrit

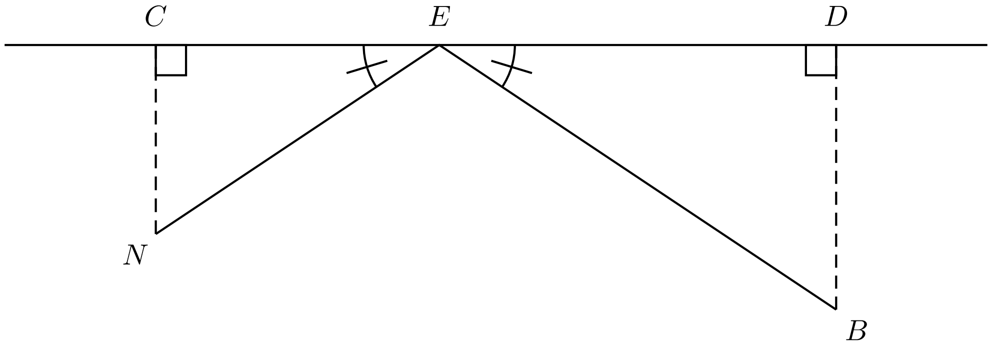
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Quatrième partie : Applications

1. Reprendre la figure de la première partie. Calculer BC directement, en utilisant le théorème d'Al-Kashi.
2. Calcul de longueur
   Soit MNP un triangle tel que $MN = 4\,cm$, $MP = 5\,cm$ et $\widehat{M} = 35^\circ$.
   Calculer NP. Vérifier le résultat en traçant le triangle.
3. Calcul de la mesure d'un angle
   Soit FGH un triangle tel que $FG = 5\,cm$, $FH = 6\,cm$ et $GH = 7\,cm$.
   Calculer les mesures des trois angles du triangle.

Trigonométrie et billard

L'unité de longueur est le centimètre.

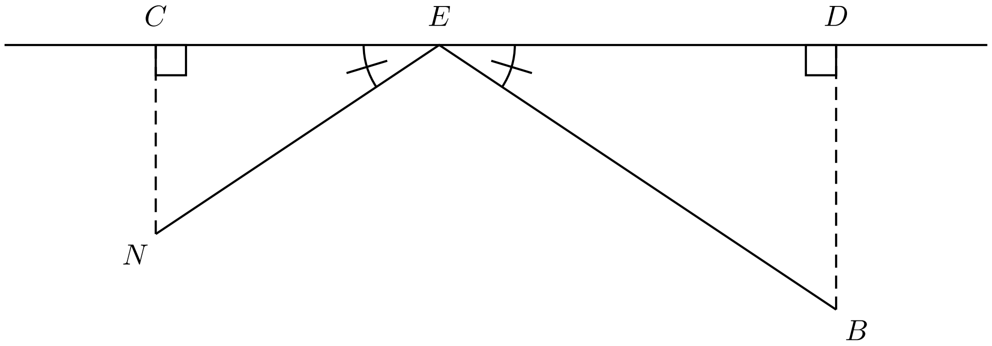


Le schéma ci-dessus représente une bande de billard. Deux boules de billard N et B sont placées telles que : CD=90, NC=25 et BD=35.
Un joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet BEN, E étant entre C et D et $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$.
On pose $ED = x$.

1. Donner un encadrement de x, puis exprimer CE en fonction de x.
2. Dans le triangle BED, exprimer $\tan \widehat{DEB}$ en fonction de x.
3. Dans le triangle NEC, exprimer $\tan \widehat{NEC}$ en fonction de x.
4. En remarquant que $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$, donner une égalité provenant des 2 questions précédentes. Elle est équivalente à cette équation : $35(90 - x) = 25x$.
5. Résoudre cette équation.
6. En déduire la valeur commune des angles $\widehat{CEN}$ et $\widehat{DEB}$.
7. Calculer la longueur du trajet effectué par la balle de 2 manières différentes, on donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée au mm.

Trigonométrie et billard

L'unité de longueur est le centimètre.



Le schéma ci-dessus représente une bande de billard. Deux boules de billard N et B sont placées telles que : CD=90, NC=25 et BD=35.
Un joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet BEN, E étant entre C et D et $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$.
On pose $ED = x$.

1. Donner un encadrement de x, puis exprimer CE en fonction de x.
2. Dans le triangle BED, exprimer $\tan \widehat{DEB}$ en fonction de x.
3. Dans le triangle NEC, exprimer $\tan \widehat{NEC}$ en fonction de x.
4. En remarquant que $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$, donner une égalité provenant des 2 questions précédentes. Elle est équivalente à cette équation : $35(90 - x) = 25x$.
5. Résoudre cette équation.
6. En déduire la valeur commune des angles $\widehat{CEN}$ et $\widehat{DEB}$.
7. Calculer la longueur du trajet effectué par la balle de 2 manières différentes, on donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée au mm.

Travail préliminaire sur le nombre π

Exercice 1 : Approximation de π

Trouver de la ficelle et toutes sortes d'objets cylindriques, pour déterminer une valeur approchée de π (des boîtes de camembert et de coulommiers) , des rouleaux de papier toilette, roue de vélo etc...). Enrouler la ficelle un certain nombre de tours entiers autour de l'objet puis mesurer la ficelle déroulée. (Remarque : il faut faire plusieurs tours pour avoir une meilleure précision) Noter les résultats dans un tableau (nombres de tours et longueur de la ficelle). Calculer la longueur de la ficelle pour un tour et diviser par le diamètre de l'objet.

Objets				
Nombres de tours				
Longueur de la ficelle déroulée				
Longueur d'un tour				
Diamètre de l'objet				
$\dfrac{\text{Longueur du tour}}{\text{Diamètre de l'objet}}$				

Que constate-t-on ?
Calculer la moyenne des résultats obtenus.

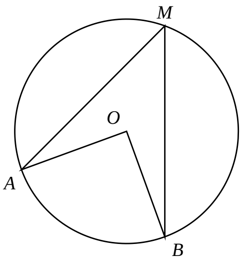
Exercice 2 : Encadrement de π

Le but de cet exercice est de donner un encadrement du nombre π, on n'utilisera donc pas, au cours de l'exercice, de valeurs approchées de π.
Soit D un disque de rayon r. D est inscrit dans un carré C de côté $2r$.

1. Faire une figure correspondant au problème.
2. Calculer $\mathcal{A}_C$, l'aire du carré, et $\mathcal{A}_D$, l'aire du disque, en fonction de r.
3. Montrer que $\dfrac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_C} = \dfrac{\pi}{4}$.
4. On travaille avec un quart de disque et le quart de carré correspondant.
   Calculer $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}D}$, l'aire du quart de disque, et $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}C}$, l'aire du quart de carré.
5. Calculer $\dfrac{\mathcal{A}_{\frac{1}{4}D}}{\mathcal{A}_{\frac{1}{4}C}}$. Que constate-t-on ?
6. Dans la suite du problème, l'unité d'aire est le carreau.
   Tracer, sur une feuille petits carreaux, un quart de disque de rayon 10 carreaux et le carré correspondant.
   (a) Calculer $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}C}$.
   (b) Compter le nombre de carreaux situés à l'intérieur du quart de disque.
   (c) Compter le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir entièrement le quart de disque.
   (d) À partir des 2 précédentes questions, donner un encadrement de $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}D}$.
   (e) Donner un encadrement de $\dfrac{\mathcal{A}_{\frac{1}{4}D}}{\mathcal{A}_{\frac{1}{4}C}}$.
   (f) En déduire un encadrement de π.
7. Recommencer le procédé avec 20 carreaux et donner un nouvel encadrement de π.

Angles inscrits et navigation

Première partie : Préliminaires



On considère deux points A et B, $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$, on pose $\widehat{AMB} = \alpha$.

1. Montrer que $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} = 2 \times \alpha$.
2. Montrer que le triangle AOB est isocèle en O.
3. Déduire des deux questions précédentes que $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = 90 - \alpha$.

Deuxième partie : Tracés

On pose $\widehat{AMB} = 40^\circ$. A et B étant fixés, on veut connaitre les positions possibles du point M, autrement dit, on veut tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = 40^\circ$, connaissant la position de A et de B.

1. Quelle est la mesure de $\widehat{AOB}$ et de $\widehat{ABO}$?
2. Placer 2 points A et B dans le plan distant de $4\,cm$. Tracer les deux triangles AOB possible. On appellera O et O' les deux sommets.
3. Dans un premier temps, on ne s'occupera que des points A, B et O. D'après la figure ci-dessus et les notions du cours, tracer l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = 40^\circ$.
4. En considérant les points A, B et O', tracer l'ensemble des points M' tel que $\widehat{AM'B} = 40^\circ$

On voit donc qu'à partir de deux points, on peut tracer deux arcs de cercles représentant l'ensemble des points M.

Deuxième partie bis : Tracés

On pose $\widehat{AMB} = 100^\circ$. A et B étant fixés, on veut connaitre les positions possibles du point M, autrement dit, on veut tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = 100^\circ$, connaissant la position de A et de B. On se retrouve dans la cas où l'angle au centre sera un « grand angle » ou « angle rentrant » (supérieur à 180°), on le note dans ce cas $\widetilde{AOB}$.

1. Quelle est la mesure de $\widetilde{AOB}$ (l'angle rentrant), $\widehat{AOB}$ et de $\widehat{OAB}$?
2. Placer 2 points A et B dans le plan distant de $4\,cm$. Tracer les deux triangles AOB possible. On appellera O et O' les deux sommets.
3. Dans un premier temps, on ne s'occupera que des points A, B et O. D'après la figure ci-dessus et les notions du cours, tracer l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = 100^\circ$.
4. En considérant les points A, B et O', tracer l'ensemble des points M' tel que $\widehat{AM'B} = 100^\circ$

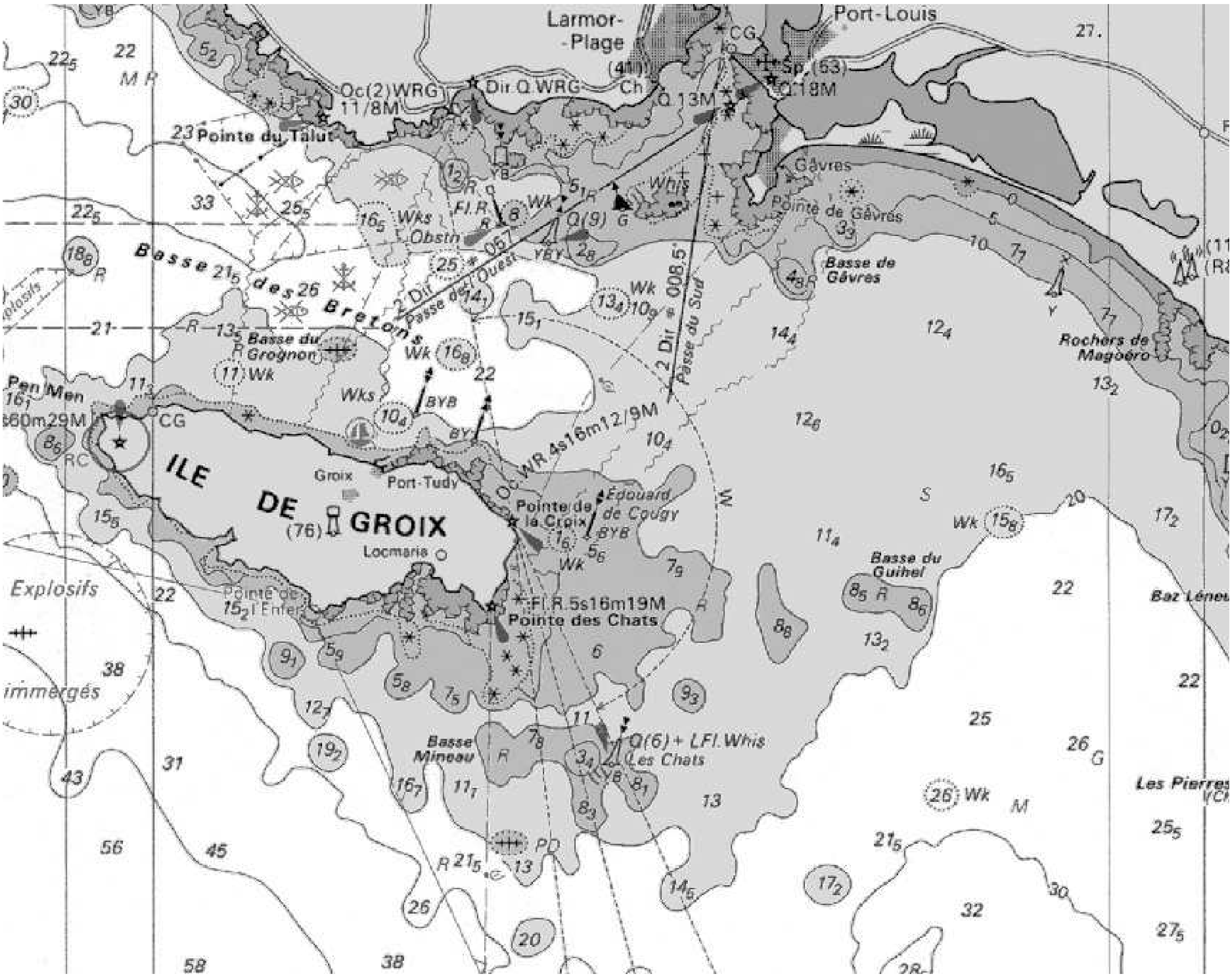
On voit donc qu'à partir de deux points, on peut tracer deux arcs de cercles représentant l'ensemble des points M.

Troisième partie : Navigation

Pour naviguer le long des côtes, et avant les systèmes GPS, les navigateurs devaient se diriger grâce à des repères sur la côte (phares, pointes, tours, etc). Grâce à deux mesure d'angles et une carte, ils pouvaient se repérer facilement, on va voir comment.

1. Placer 3 points A, B et C tels que $AB = 4\,cm$ $AC = 5\,cm$ et $BC = 8\,cm$.
2. Tracer l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = 30^\circ$.
3. Tracer l'ensemble des points N tels que $\widehat{ANC} = 40^\circ$.
4. Les deux ensembles se coupent en deux points, ce sont les seuls points d'où « l'on voit A et B d'un angle de 30° et A et C d'un angle de 40° ».
   Sachant que du point qui nous intéresse, A est situé à droite de B, entourer en rouge le point où se situe la bonne position. C'est donc par cette méthode que certains marins se repéraient le long des côtes.

Quatrième partie : Application



Un bateau se situe proche de la côte bretonne, on va repérer sa position sur la carte.
Pour des raisons de clarté, on notera par A la pointe des Chats, B la pointe de Gâvres, C la pointe du Talut et D la pointe de la Croix. On marquera, proprement, en rouge ces points importants sur la carte pour plus de lisibilité. Les traits de construction doivent être fins et légers pour être effacer au fur et à mesure.

1. Le bateau voit la pointe des Chats et la pointe de Gâvres avec un angle de 50°, la pointe de Gâvres et la pointe du Talut avec un angle de 10°. La pointe des Chats se situant à gauche de la pointe de Gâvres, déterminer la position, sur la carte, du bateau.
2. Quelques temps plus tard, ce même bateau voit la pointe de la Croix et la pointe de Gâvres avec un angle de 120°, la pointe de la Croix et la pointe du Talut avec un angle de 60°. Déterminer la position, sur la carte, du bateau.
3. Si le bateau continue sa route dans la même direction, va-t-il s'échouer ? Si oui, de combien de degrés doit-t-il modifier sa route ?

Solides de Platon

Définitions :

• Un polygone est dit convexe si toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone. Par exemple, le carré en est un, alors que les polygones en étoiles ne le sont pas.
• Un polyèdre est un solide délimité par des faces polygonales. Chaque côté de chaque polygone constituant une face coïncide avec un côté d'une autre face et chaque sommet est relié à un autre par une suite d'arêtes dont deux arêtes consécutives sont reliées par un sommet (par exemple les pyramides, prismes, parallélépipède...).
• Un polyèdre convexe est un polyèdre tel que toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur du volume délimitée par le polyèdre.
• Un polyèdre régulier est un polyèdre inscriptible dans une sphère dont toutes les faces sont des polygones réguliers (triangle equilatéral, carré, pentagone régulier). Les polyèdre réguliers les plus connus sont le cube et le tetraèdre régulier, ces deux solides font parti d'un groupe de cinq solides appelés Solides de Platon (-427 ; -347), qui sont les cinq seuls polyèdre régulier convexes. Nous allons d'abord les découvrir puis dégager certaines propriétés et enfin montrer qu'il n'en existe que cinq (ce que fit Euclide(-320 ; -260)).

Recherches :

Les cinq solides de Platon sont : le tetraèdre, l'hexaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre, on considère bien sûr à chaque fois qu'ils sont réguliers (sinon, ce ne seraient pas des solides de Platon...).

1. Rechercher les significations des racines greques suivantes : tetra, hexa, octa, dodeca, icosa.
2. À partir de vos recherches, nommer les cinq solides (découpez les figures en fin de page).
3. Comment appelle-t-on habituellement l'hexaèdre ?

Propriété :

Partie A : Travail sur l'octaèdre régulier

1. Combien de faces a l'octaèdre régulier ?
2. Sur chaque face, combien y-a-t-il d'arêtes ?
3. On veut compter le nombre d'arêtes qu'il y a sur un octaèdre, sachant qu'on connait le nombre d'arêtes par faces et le nombre de faces, on peut presque répondre, il faut toutefois faire attention, car chaque arête est commune à deux faces, il faut donc multiplier le nombre de faces par le nombre d'arêtes par face, puis diviser par deux (étant donné que chaque arête est comptée deux fois).
   Calculer le nombre d'arêtes sur l'octaèdre.
4. En utilisant le même raisonnement que précédemment, calculer le nombre sommets de l'octaèdre.
5. Vérifier le résultat sur la figure.

Partie B : Généralisation
On désigne par A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces et S le nombre de sommets d'un polyèdre.

1. En utilisant la méthode décrite en partie A, compléter le tableau suivant :

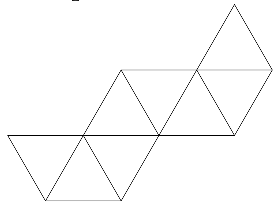
	Tetraèdre	Hexaèdre	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
F					
A					
S					
$F+S-A$					

2. Que peut-on dire de la valeur $F+A-S$?

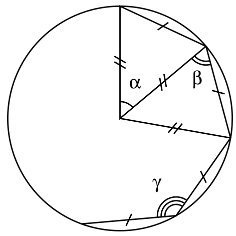
Nombre de solides de Platon :

On a vu lors des premières parties cinq polyèdre réguliers, on va montrer qu'il n'en existe que 5.

À partir du patron de l'octaèdre ci-contre, en regardant le sommet marqué, on remarque que la somme des mesures des angles est inférieure à 360°. Ce résultat est généralisé à l'ensemble des polyèdres convexes.



1. Dans un polygone régulier à n côtés, on va montrer que l'angle γ formé entre 2 côtés consécutifs est $180 - \dfrac{360}{n}$.
   La figure ci dessous représente une partie de polygone régulier, il est composé de n triangles isocèles identiques.

   (a) Exprimer α en fonction de n.
   (b) Exprimer β en fonction de n.
   (c) Exprimer γ en fonction de n.

2. À partir du résultat précédent, compléter le tableau suivant (on donnera le résultat à 1° près si nécessaire) :

Nombre de faces	3	4	5	6	7	8	9	10
Angle formé par 2 côtés consécutifs								

3. On sait qu'à chaque sommet se rejoigne au moins 3 faces (si il n'y en a que 2, cela ne forme pas de sommet...), on sait aussi que pour être régulier, un polyèdre doit posséder le même nombre de polygones réguliers en chacun de ses sommets. On veut calculer la somme des mesures des angles en 1 sommet dans différents cas (possibles ou non).
   Compléter le tableau suivant en utilisant le tableau précédent :

Nombre de faces / Nombre de faces en un sommet	3	4	5	6	7	8	9	10
3								
4								
5								
6								
7								

4. Sachant que la somme des mesures des angles est inférieure à 360°, mettre en valeur (en coloriant) dans le tableau les cas possibles. Combien y en a-t-il ?