Cours 4^e

2006-2007

Table des matières

Chapitre 1

Produit et quotient de deux nombres relatifs

Sommaire

Programme 2004

Opérations $(+, -, \times, \div)$ sur les nombres relatifs en écriture décimale (non nécessairement simplifiée).	Calculer le produit de nombres relatifs simples dans les différents cas de signe qui peuvent se présenter.	Toute étude théorique des propriétés des opérations est exclue. Les élèves ont la pratique de l'utilisation de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale ou fractionnaire. En s'appuyant sur ces connaissances, les opérations seront étendues au cas des nombres relatifs. Les justifications pourront être limitées à l'observation de l'extension de tables de multiplication ou à la généralisation de règles provenant de l'addition de nombres (par exemple $3 \times (-2) = -2 - 2 - 2 = -6$), en admettant les résultats dans les autres cas.
	Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.	À la suite du travail commencé en 5e avec des nombres décimaux positifs, les élèves seront entraînés aux mêmes types de calculs avec des nombres relatifs. Ils seront ainsi progressivement familiarisés à l'usage des priorités opératoires intervenant dans les conventions usuelles d'écritures ainsi qu'à la gestion d'un programme de calcul utilisant des parenthèses.

I. Rappels : somme et différence de nombres relatifs

1) Somme de deux nombres relatifs de même signe

- On additionne leurs distances à 0.
- On met devant le résultat obtenu le signe commun aux deux nombres.

Exemples :
$(-7)+(-3)=-10 \qquad 3+5=8 \qquad (-8)+(-21)=-29 \qquad (-3,7)+(-5,4)=-9,1$

2) Somme de deux nombres relatifs de signes contraires

- On soustrait leurs distances à 0.
- On met devant le résultat obtenu le signe du nombre qui a la plus grande distance à 0.

Exemples :
$(-7)+(3)=-4 \qquad 3+(-5)=-2 \qquad (8)+(-21)=-13 \qquad (3,7)+(-5,4)=-1,7$

3) Différence de deux nombres relatifs

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé, puis on utilise les règles de sommes de nombres relatifs.

Exemples :
$(-4)-(-3)=(-4)+(+3)=-1 \qquad (-13)-(+4)=(-13)+(-4)=-17$
$(18)-(-21)=18+(+21)=39 \qquad (-2,9)-(+6,7)=(-2,9)+(-6,7)=-9,6$

Exercice : 1, 5 et 6 page 8, 40 et 41 page 18

II. Produit de deux nombres relatifs

1) Produit de deux nombres relatifs de signes opposés

Activité : 1.1 (feuille)

Le produit de deux nombres relatifs de signes opposés est NÉGATIF.

Exemples $(-4) \times (+6) = -24$ $(+7) \times (-3) = -21$

2) Produit de deux nombres relatifs de même signe

Activité : 1.2 (feuille)

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.

Exemples $(-4) \times (-2) = +8$ $(+7) \times (+3) = +21$

Exercices : 1 et 4 page 15, 17, 18 et 20 page 16 (sauf F,G et H).

3) Multiplication par 0

Si a est un nombre relatif quelconque alors $a \times 0 = 0 \times a = 0$.
Exemples $(-4) \times (0) = 0$

4) Multiplication par -1

Multiplier un nombre relatif par -1, c'est prendre l'opposé de ce nombre.

5) Distributivité

Activité : 2 (feuille)

Si a, b, k sont trois nombres relatifs quelconques alors

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exercices : 53 page 19 et 25 page 16 (b)D,E et F)

III. Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Activité : 3 (feuille)

Lorsque l'on multiplie des nombres relatifs différents de 0 :
– s'il y a un nombre PAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est POSITIF.
– s'il y a un nombre IMPAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est NÉGATIF.

Exemples :
Soit $A = (-4) \times 3 \times (-7) \times (-110) \times (-17)$.
A est positif car il y a 4 facteurs négatifs (4 est pair).
Soit $B = 13 \times (-19) \times (-53) \times (-15)$.
B est négatif car il y a 3 facteurs négatifs (3 est impair).

Exercices : 61 page 20 (C et D) et 15 page 16

IV. Quotient de deux nombres relatifs

Activité : 4 (feuille)

Définition :
Le nombre x qui vérifie $ax = b$ (avec $a \neq 0$) s'appelle **le quotient** de b par a. Il se note $\frac{b}{a}$: $x = \frac{b}{a}$.

Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.
Le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est NÉGATIF.

Exemples :

$\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5$

$\frac{-9}{3} = \frac{9}{-3} = -\frac{9}{3} = -3$

Exercices : 11 page 15, 23 page 16, 44 et 45 page 18, 50 et 51 page 19

V. Inverse d'un nombre relatif différent de 0

Définition :
L'inverse d'un nombre relatif x (avec $x \neq 0$) est le quotient de 1 par x ; on le note $\frac{1}{x}$.

$$x \times \frac{1}{x} = 1$$

4e

I Rappels

☐ ☐ 1 p 8
☐ ☐ 5 p 8
☐ ☐ 6 p 8
☐ ☐ 40 p 18
☐ ☐ 41 p 18

II Produit de deux nombres relatifs

2 Produit de deux nombres de même signe

☐ ☐ 1 p 15
☐ ☐ 4 p 15
☐ ☐ 17 p 16
☐ ☐ 18 p 16
☐ ☐ 20 p 16 sauf F,G et H

5 Distributivité

☐ ☐ 53 p 19
☐ ☐ 25 p 16 (b) D,E et F)

III Signe d'un produit de plusieurs facteurs

☐ ☐ 61 p 20 (C et D)
☐ ☐ 15 p 16

IV Quotient de deux nombres relatifs

☐ ☐ 11 p 15
☐ ☐ 23 p 16
☐ ☐ 44 p 18
☐ ☐ 45 p 18
☐ ☐ 50 p 19
☐ ☐ 51 p 19

4e

I Rappels

☐ ☐ 1 p 8
☐ ☐ 5 p 8
☐ ☐ 6 p 8
☐ ☐ 40 p 18
☐ ☐ 41 p 18

II Produit de deux nombres relatifs

2 Produit de deux nombres de même signe

☐ ☐ 1 p 15
☐ ☐ 4 p 15
☐ ☐ 17 p 16
☐ ☐ 18 p 16
☐ ☐ 20 p 16 sauf F,G et H

5 Distributivité

☐ ☐ 53 p 19
☐ ☐ 25 p 16 (b) D,E et F)

III Signe d'un produit de plusieurs facteurs

☐ ☐ 61 p 20 (C et D)
☐ ☐ 15 p 16

IV Quotient de deux nombres relatifs

☐ ☐ 11 p 15
☐ ☐ 23 p 16
☐ ☐ 44 p 18
☐ ☐ 45 p 18
☐ ☐ 50 p 19
☐ ☐ 51 p 19

4e

I Rappels

☐ ☐ 1 p 8
☐ ☐ 5 p 8
☐ ☐ 6 p 8
☐ ☐ 40 p 18
☐ ☐ 41 p 18

II Produit de deux nombres relatifs

2 Produit de deux nombres de même signe

☐ ☐ 1 p 15
☐ ☐ 4 p 15
☐ ☐ 17 p 16
☐ ☐ 18 p 16
☐ ☐ 20 p 16 sauf F,G et H

5 Distributivité

☐ ☐ 53 p 19
☐ ☐ 25 p 16 (b) D,E et F)

III Signe d'un produit de plusieurs facteurs

☐ ☐ 61 p 20 (C et D)
☐ ☐ 15 p 16

IV Quotient de deux nombres relatifs

☐ ☐ 11 p 15
☐ ☐ 23 p 16
☐ ☐ 44 p 18
☐ ☐ 45 p 18
☐ ☐ 50 p 19
☐ ☐ 51 p 19

4e

I Rappels

☐ ☐ 1 p 8
☐ ☐ 5 p 8
☐ ☐ 6 p 8
☐ ☐ 40 p 18
☐ ☐ 41 p 18

II Produit de deux nombres relatifs

2 Produit de deux nombres de même signe

☐ ☐ 1 p 15
☐ ☐ 4 p 15
☐ ☐ 17 p 16
☐ ☐ 18 p 16
☐ ☐ 20 p 16 sauf F,G et H

5 Distributivité

☐ ☐ 53 p 19
☐ ☐ 25 p 16 (b) D,E et F)

III Signe d'un produit de plusieurs facteurs

☐ ☐ 61 p 20 (C et D)
☐ ☐ 15 p 16

IV Quotient de deux nombres relatifs

☐ ☐ 11 p 15
☐ ☐ 23 p 16
☐ ☐ 44 p 18
☐ ☐ 45 p 18
☐ ☐ 50 p 19
☐ ☐ 51 p 19

Activité 1 : Produit de deux nombres relatifs

1. Produit de deux nombres relatifs de signes différents

On sait que $2+2+2+2+2+2 = 6\times 2 = 12$ ou que $5+5+5+5+5+5+5+5 = 8\times 5 = 40$.

1. (a) Calculer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= (-2)+(-2)+(-2) = \ldots \\ B &= (-5)+(-5)+(-5)+(-5)+(-5) \\ C &= (-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7) \\ D &= (-4)+(-4)+(-4) \end{aligned}$$

   (b) Écrire sous la forme d'une multiplication les expressions A, B, C et D précédentes.

   (c) Regrouper les deux résultats sous la forme d'une égalité.
   Que remarque-t-on ?

2. Construisons différentes tables de multiplications.

$$\begin{array}{rcccll} \vdots & \times & 4 & = & \vdots & \\ 3 & \times & 4 & = & 12 & \\ 2 & \times & 4 & = & 8 & \text{-}\ldots \\ 1 & \times & 4 & = & 4 & \text{-}\ldots \\ 0 & \times & 4 & = & 0 & \text{-}\ldots \\ -1 & \times & 4 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -2 & \times & 4 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -3 & \times & 4 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -4 & \times & 4 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ \vdots & \times & 4 & = & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccll} \vdots & \times & 2 & = & \vdots & \\ 3 & \times & 2 & = & 6 & \\ 2 & \times & 2 & = & 4 & \text{-}\ldots \\ 1 & \times & 2 & = & 2 & \text{-}\ldots \\ 0 & \times & 2 & = & 0 & \text{-}\ldots \\ -1 & \times & 2 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -2 & \times & 2 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -3 & \times & 2 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -4 & \times & 2 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ \vdots & \times & 2 & = & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccll} \vdots & \times & 7 & = & \vdots & \\ 3 & \times & 7 & = & 21 & \\ 2 & \times & 7 & = & 14 & \text{-}\ldots \\ 1 & \times & 7 & = & 7 & \text{-}\ldots \\ 0 & \times & 7 & = & 0 & \text{-}\ldots \\ -1 & \times & 7 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -2 & \times & 7 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -3 & \times & 7 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ -4 & \times & 7 & = & \ldots & \text{-}\ldots \\ \vdots & \times & 7 & = & \vdots & \end{array}$$

Le produit de deux nombres relatifs de signes opposés est ....

2. Produit de deux nombres relatifs de même signe

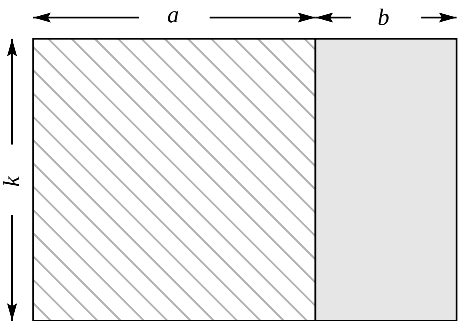
Examinons maintenant le cas de deux nombres négatifs à l'aide de notre nouvelle règle de calculs.
Construisons les tables de multiplications des nombres -3, -5 et -8

$$\begin{array}{rcccll} \vdots & \times & (\text{-}3) & = & \vdots & \\ 3 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}9 & \\ 2 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}6 & +\ldots \\ 1 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}3 & +\ldots \\ 0 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}0 & +\ldots \\ -1 & \times & (\text{-}3) & = & \ldots & +\ldots \\ -2 & \times & (\text{-}3) & = & \ldots & +\ldots \\ -3 & \times & (\text{-}3) & = & \ldots & +\ldots \\ -4 & \times & (\text{-}3) & = & \ldots & +\ldots \\ \vdots & \times & (\text{-}3) & = & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccll} \vdots & \times & (\text{-}5) & = & \vdots & \\ 3 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}15 & \\ 2 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}10 & +\ldots \\ 1 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}5 & +\ldots \\ 0 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}0 & +\ldots \\ -1 & \times & (\text{-}5) & = & \ldots & +\ldots \\ -2 & \times & (\text{-}5) & = & \ldots & +\ldots \\ -3 & \times & (\text{-}5) & = & \ldots & +\ldots \\ -4 & \times & (\text{-}5) & = & \ldots & +\ldots \\ \vdots & \times & (\text{-}5) & = & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccll} \vdots & \times & (\text{-}8) & = & \vdots & \\ 3 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}24 & \\ 2 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}16 & +\ldots \\ 1 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}8 & +\ldots \\ 0 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}0 & +\ldots \\ -1 & \times & (\text{-}8) & = & \ldots & +\ldots \\ -2 & \times & (\text{-}8) & = & \ldots & +\ldots \\ -3 & \times & (\text{-}8) & = & \ldots & +\ldots \\ -4 & \times & (\text{-}8) & = & \ldots & +\ldots \\ \vdots & \times & (\text{-}8) & = & \vdots & \end{array}$$

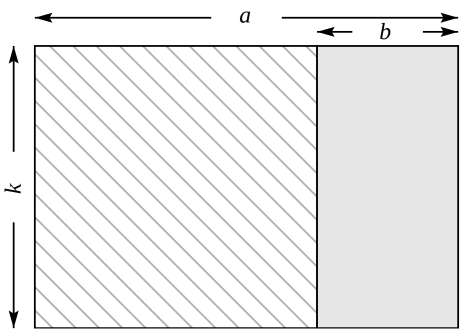
Le produit de deux nombres relatifs de même signe est ....

Activité 2 : Distributivité et nombres relatifs

Pour des nombres k, a et b positifs, on sait que



$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$



$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

On va voir ce qu'il se passe si k, a ou b sont des nombres négatifs.
Complète le tableau suivant :

k	a	b	$k \times a$	$k \times b$	$k \times a + k \times b$	$(a + b)$	$k \times (a + b)$
2	3	-1					
2	3	-4					
3	-4	2					
3	-4	7					
4	-3	-2					
-5	-3	-2					

Que remarque-t-on pour les 6^{e} et 8^{e} colonnes ?

Activité 3 : Signe d'un produit de plusieurs facteurs

On donne le produit suivant :

$$A = (-3) \times 5 \times 7 \times (-9) \times (-11) \times (-7) \times 4 \times (-6)$$

On se propose de déterminer le signe de l'expression A.

1. Complète en déterminant le signe de chacun des 7 produits qui composent l'expression A.

$$A = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(-3) \times 5}_{\text{signe...}} \times 7}_{\text{signe...}} \times (-9)}_{\text{signe...}} \times (-11)}_{\text{signe...}} \times (-7)}_{\text{signe...}} \times 4}_{\text{signe...}} \times (-6)}_{\text{signe...}}$$

2. Classe ces produits suivant leur signe.
3. Qu'ont en commun les produits dont le signe est positif ? Qu'ont en commun les produits dont le signe est négatif ?

Lorsque je multiplie plusieurs facteurs, il faut ....
..
pour obtenir le signe de ce produit de plusieurs facteurs.

Activité 4 : Quotient de 2 nombres relatifs

1. Trouve la valeur manquante dans chacun des cas :

$$4 \times \ldots = 12 \qquad 5 \times \ldots = -10 \qquad \ldots \times 7 = -21$$
$$\ldots \times (-8) = -24 \qquad -9 \times \ldots = 36 \qquad \ldots \times (-10) = 110$$

2. On sait que *le quotient* de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui multiplié par b donne a. Par exemple, le quotient de 18 par 3 est 6 (car $3 \times 6 = 18$ ou $18 \div 3 = 6$).
   Traduis chacune des égalités de la question précédente par une phrase commençant par « *Le quotient de. . .*
3. Que remarque-t-on ?
4. Prouvons cette dernière remarque.
   Soit a et b deux nombres relatifs quelconques (avec $b \neq 0$) tels que

$$b \times \ldots = a$$

Plusieurs cas sont possibles :

si a et b sont positifs	si a et b sont négatifs	si a est positif et si b est négatif
$\underbrace{b}_{+} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{-}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$
Quotient de a par b : . . .	Quotient de a par b : . . .	Quotient de a par b : . . .

Le quotient de 2 nombres relatifs de mêmes signes est . . . .
Le quotient de 2 nombres relatifs de signes différents est . . . .

Activité 4 : Quotient de 2 nombres relatifs

1. Trouve la valeur manquante dans chacun des cas :

$$4 \times \ldots = 12 \qquad 5 \times \ldots = -10 \qquad \ldots \times 7 = -21$$
$$\ldots \times (-8) = -24 \qquad -9 \times \ldots = 36 \qquad \ldots \times (-10) = 110$$

2. On sait que *le quotient* de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui multiplié par b donne a. Par exemple, le quotient de 18 par 3 est 6 (car $3 \times 6 = 18$ ou $18 \div 3 = 6$).
   Traduis chacune des égalités de la question précédente par une phrase commençant par « *Le quotient de. . .*
3. Que remarque-t-on ?
4. Prouvons cette dernière remarque.
   Soit a et b deux nombres relatifs quelconques (avec $b \neq 0$) tels que

$$b \times \ldots = a$$

Plusieurs cas sont possibles :

si a et b sont positifs	si a et b sont négatifs	si a est positif et si b est négatif
$\underbrace{b}_{+} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{-}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$
Quotient de a par b : . . .	Quotient de a par b : . . .	Quotient de a par b : . . .

Le quotient de 2 nombres relatifs de mêmes signes est . . . .
Le quotient de 2 nombres relatifs de signes différents est . . . .

Exercice 1

Effectue, en les détaillant, les calculs suivants

$$A = (-1) + (-3) + (-5) \qquad B = 1 + 3 + (-5)$$
$$C = (-2) - (-5) + 3 \qquad D = 2 + (-5) - (-4)$$

Exercice 2

Calcule les expressions suivantes

$$G = 4,5 - 18,1 + 0,25 + 9 - 1,9 \qquad H = -72 + 185 - 61 - 61 - 83$$
$$I = -12 + 7 - 8 - 10 + 3 \qquad J = 67 - 3,4 + 15 - 0,6 - 2$$
$$K = 8 + (-9 - 5) \qquad L = (3,5 - 7) - (9,5 - 5,5)$$
$$M = -(12,4 - 9) + (1 - 10,5) - (14 - 9)$$

Exercice 3

Effectue les calculs suivants :

$$A = (-2) \times (+3) \quad B = 4 \times (-5) \quad C = (-4) \times (-3)$$
$$D = (-5) \times 5 \quad E = 5 \times (+2) \quad F = (-7) \times 4$$

Exercice 4

Recopie et complète le tableau :

$\times$	-2	0	$+5$	$+10$
-10				
-5				
-1				
$+2$				

Exercice 5

Dans un repère du plan,

1. Placer les points S, A, R, D, I, N et E dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau, puis relier les points dans cet ordre en terminant par le segment $[ES]$.

S	A	R	D	I	N	E
$(2; -0,5)$	$(1,5; -0,5)$	$(1; 0)$	$(1, 1)$	$(0,5; 0,5)$	$(1,5; 0,5)$	$(2; 0)$

2. On obtient les coordonnées des points S', A', R', D', I', N' et E' en multipliant celles des points S, A, R, D, I, N et E par (-4).
   Recopie et complète le tableau uivant, puis place ces sept nouveaux points dans le même repère qu'au 1 et relie-les.

S'	A'	R'	D'	I'	N'	E'

Exercice 6

Donne le signe des 2 produits suivants. Justifie la réponse.

$$I = 3,1 \times 4,2 \times (-1,2) \times (-1,3) \times 4,7 \times (-1,9)$$
$$J = (-19,1) \times (-37,2) \times 17,4 \times (-43,7) \times (-51,2)$$

Exercice 7

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$$N = (-8) + 5 \times (-3) \qquad P = (-3 - 8) \times 7 + 4$$
$$R = 7 - 2 \times (4 - 9) \qquad S = -32 - (4 - 20) \times 2$$
$$T = 3 \times 11 - 10 \times (-2) \qquad V = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-10)$$

Exercice 8

On donne les expressions suivantes

$$G = -4x - 3 \qquad H = 4 \times (x - 3) \qquad I = 4 + x \qquad J = 4 - x$$

Calculer G, H, I, J pour $x = -5$.

Exercice 9

La lumière solaire pénètre jusqu'à la côte -500 mètres sous le niveau de la mer.

1. Des scientifiques ont mesuré que les cachalots peuvent descendre 5 fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte peuvent atteindre les cachalots ?
2. En 1960, le bathyscaphe Trieste, est descendu $21,8$ fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte avait atteint ce sous-marin ?

Exercice 10

Au large de la Floride, il existe une dépression sous-marine qui atteint $5\,850\,m$ de profondeur. Un engin aquatique télécommandé s'enfonce sous l'eau par palier de $-850\,m$. Il réalise quatre plongées successives.

1. De combien de mètres devra-t-il encore descendre sous l'eau ?
2. Cela nécessitera encore combien de plongées ?

⋆⋆

Exercice 11

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$A = 3 \times (-5) + (-30) \div 5 \qquad B = \big[36 \div (-9) + 2\big] \times 5 - 2$$
$$C = \big[8 \times (-5) + 8\big] \div 4 \qquad D = \big(-4 \times 5 + 2\big) \div \big((-10) \div (-5) + 7\big)$$

Exercice 12

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$E = 3 \times (-5) + (-6) \times 5 \qquad F = [4 \times (-9) + 2] \times 5 - 2$$
$$G = 8 \times (-5) + 3 - (-6) \times 8 \qquad H = (-4 \times 5 + 2) \times (2 \times (-5) + 1)$$

Exercice 13

Recopie et complète les tableaux suivants en faisant apparaître les calculs.

a	b	$a \times b$	$a + b$	$a - b$
3	-2			
4	5			
-6	-7			
-4	2			

a	b	c	$a \times b$	$a \times c$	$b \times c$	$a + c$	$b + c$
2	3	-1					
-2	-4	-5					
0	2	4					
4	-1	5					

Exercice 14

Un carré magique de produits est un tableau tel que les produits des nombres écrits sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chacune des deux diagonales, sont égaux.
Vérifie si le tableau ci-dessous est un carré magique de produits :

-1	-5	$1,6$
$-3,2$	2	$-1,25$
$2,5$	$-0,8$	-4

Exercice 15

Indique la bonne réponse en effectuant les calculs sans calculatrice.

	Réponse A	**Réponse B**
$(50-72)-(27-49)$	-98	0
$-5+(-5)\times 3$	30	-20
$3-6\times(-1)$	3	9
$-12+(-10)\times(-2)$	8	11
$8\times(-4)-(-6)\times 2$	-20	-13

Exercice 16

Effectue les calculs suivants

$$A=[(-3)\times 7+6]\div(-5) \qquad B=[(-40)\div 8+7]\times(-3)$$
$$C=18\div(-6)-5\times(-2) \qquad D=(7-(-3)\times 4)\times(-2)+(-12)$$
$$E=3\times(-5)+(-25)\div 5 \qquad F=[36\div(-9)+2]\times 5-2$$
$$G=8\times(-5)+3-(-48)\div 8 \qquad H=(-4\times 5+2)\div(2\times(-6)+1)$$

Exercice 17

Détermine la valeur des expressions suivantes pour $x=2$, $y=-3$, $z=-5$ puis pour $x=-4$, $y=-1$, $z=-2$.

$$A=4\times x-2\times y+3\times z \qquad B=xy+yz+zx$$

Exercice 18

1. Calcule les expressions suivantes avec $a=-2$, $b=-3$ et $c=4$.

$$E=2a-3b-5c \qquad F=\frac{5a-c}{b-c} \qquad G=\frac{c-a}{b}-2$$

2. Calcule ensuite $E+F-G$.

Exercice 19

Pour $a=-1,5$, $b=2$, $c=-5$, calcule les valeurs des expressions suivantes

$$A=abc \qquad B=ab+c$$
$$C=a(b+c) \qquad D=2a+3b-4c$$

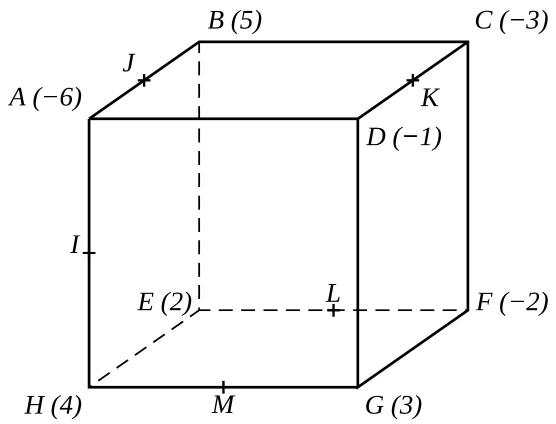
⋆⋆⋆

Exercice 20

Calcule la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$D=[-9-(-3)]\times[16\div(-4)] \qquad E=(8\times[-1-(-2)])\div(-4)$$
$$F=\frac{8-(-1)\times 4}{-5+2}$$

Exercice 21



On considère un cube $ABCDEFGH$ sur lequel on place à chaque sommet des nombres relatifs. La valeur de chaque sommet est indiqué sur la figure ci-contre.
On cherche à étudier différents trajets reliant les points I, J, K, L et M en suivant les arêtes du cube. On va donc comparer les trajets en leur donnant une valeur : *la somme des nombres relatifs associés à chaque sommet rencontrés sur le trajet.*

1. Vérifie que le trajet IK en passant par A et D vaut -7.
2. Donne la valeur des trajets IL en 3 sommets.
3. Donne la valeur des trajets IK en 3 sommets.
4. Donne la valeur des trajets JK en 4 sommets.
5. Donne la valeur du trajet JI en 7 sommets.

Exercice 22

Calcule les expressions suivantes

$$A = 11 + 2 \times [(-3) + (-7) \times 3] \quad B = (-14) \div (-7) + (-3) \div 5$$

$$C = \frac{(-1) \times (-2) - (-3) \times 4}{2 - 2 \times (-6)} \qquad D = \frac{15 + [(-3) \times (-2) + (-5)]}{-2 \times 7 - [(-6) + 8 \times (-3)]}$$

Exercice 23

Calcule les expressions données en utilisant les valeurs $a = -11$; $b = 5$; $c = -2$.

$$A = a - bc \qquad B = (a - b)c$$
$$C = 2a - (3b + 5c) \qquad D = -(a + b) - 2c$$

Exercice 24

1. J'ai choisi un nombre x. Je lui ai retranché 12 et j'ai multiplié le résultat par -9. J'ai ainsi trouvé 900.
   Quelle était la valeur de x ?
2. J'ai choisi un nombre y. Je l'ai multiplié par -100 et j'ai ajouté 1 000 au résultat. J'ai ainsi trouvé 999.
   Quelle était la valeur de y ?

Exercice 25

Indique, en justifiant la réponse, si l'affirmation $4x + 2y > -12$ est vraie pour $x = 0$ et $y = -7$; puis pour $x = 1$ et $y = -5$; puis pour $x = -4$ et $y = 0$.

Exercice 26

1. (a) Jérémy a multiplié la somme de -7 et de 3 par -6. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

$$-7 + 3 \times (-6) \qquad (-7 + 3) \times (-6) \qquad (3 - 7) \times (-6)$$

(b) Jérémy a ensuite multiplié la somme de -8 et de 3 par 6. Quel nombre Jérémy a-t-il calculé ?

2. (a) Eva a ajouté 6 au produit de -5 par 4. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

$$-5+4\times 6 \qquad ((-5)\times 4)+6 \qquad 4\times(-5)+6$$

(b) Eva a ensuite fait la somme du produit de -6 par 4 et de 5. Quel nombre Eva a-t-elle calculé ?

Exercice 27

Calculez :

1. Le produit des inverses de -2 et 5.
2. L'inverse du produit de -2 et 5.
3. L'opposé de l'inverse de -2.
4. L'inverse de l'opposé de 5.

Récapitulatif

Addition de 2 nombres relatifs.

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

On garde le signe et ensuite on additionne.

$(+4) + (+3) = 7$

$(-5) + (-8) = -13$

Les 2 nombres relatifs n'ont pas le même signe.

Le plus éloigné, sur une droite graduée, de l'origine « l'emporte ».

$(-5) + (+3) = -2$

$(+10) + (-7) = 3$

Soustraction de 2 nombres relatifs.

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

$3 - (-7) = 3 + (+7)$

$4 - (+5) = 4 + (-5)$

On effectue ensuite l'addition.

$4 - (-9) = 4 + (+9)$

$4 - (-9) = 13$

Multiplication de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le produit est Positif.

$-4 \times (-7) = 28$

$3 \times 8 = 24$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le produit est Négatif.

$-5 \times (+3) = -15$

$(+10) \times (-7) = -70$

Division de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le quotient est Positif.

$-28 \div (-7) = 4$

$24 \div 3 = 8$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le quotient est Négatif.

$(-15) \div 3 = -5$

$10 \div (-2) = -5$

Chapitre 2

Le Théorème de Pythagore

Sommaire

Programme 2004

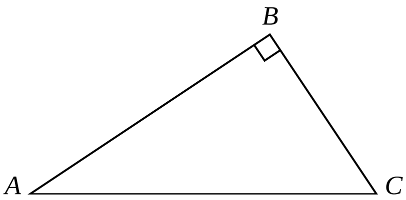
Théorème de Pythagore et sa réciproque.	Caractériser le triangle rectangle : - par la propriété de Pythagore et sa réciproque.	On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés.
	Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.	Les relations métriques dans le triangle rectangle, autres que celles mentionnées dans les compétences exigibles, ne sont pas au programme.
	En donner, s'il y a lieu, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\ }$ d'une calculatrice.	

I. Théorème de Pythagore

1) Énoncé du théorème

Activité : feuille.

> Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.



Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

2) Racine carrée

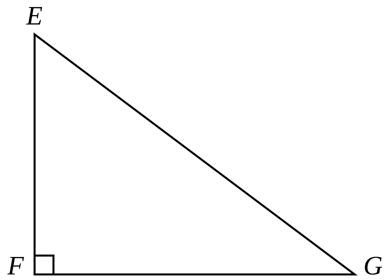
Définition :
On appelle **racine carrée** d'un nombre positif a, le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que son carré soit égal à a.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemple : $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$

3) Application : calculs de longueurs

Exemple 1 :



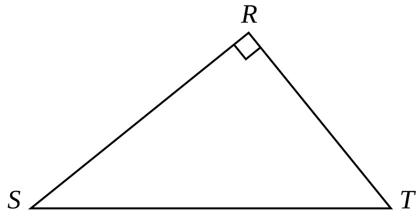
Calculer EG sachant que $EF = 6\,cm$ et $FG = 8\,cm$.

On sait que le triangle EFG est rectangle en F, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + FG^2 \\ EG^2 &= 6^2 + 8^2 \\ EG^2 &= 36 + 64 \\ EG^2 &= 100 \\ EG &= 10 \end{aligned}$$

La longueur EG mesure $10\,cm$.

Exemple 2 :



Calculer RT sachant que $RS = 7\,cm$ et $ST = 9\,cm$.

On sait que le triangle RST est rectangle en R, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} ST^2 &= SR^2 + RT^2 \\ 9^2 &= 7^2 + RT^2 \\ 81 &= 49 + RT^2 \\ RT^2 &= 81 - 49 \\ RT^2 &= 32 \\ RT &= \sqrt{32} \\ RT &\approx 5,66 \end{aligned}$$

La longueur RT mesure environ $5,66\,cm$.

Devoir maison : feuille
Exercices : 1, 3, 4 et 5 page 147 ; 15 et 20 page 148 ; 32 page 150 ; 23 page 149 ; 44 page 152 ; 71 page 154.

II. La réciproque du théorème de Pythagore

> Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple :
Est-ce que le triangle RST tel que $RS = 3\,cm$, $ST = 4\,cm$ et $TR = 5\,cm$ est un triangle rectangle ?

Dans le triangle RST, $[RT]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} TR^2 = 5^2 = 25 \\ \\ RS^2 + ST^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \end{array}\right\} TR^2 = RS^2 + ST^2$$

On sait que $TR^2 = RS^2 + ST^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S.

Exercices : 13 et 19 page 148 (ACD est un triangle rectangle en C).

III. La contraposée du théorème de Pythagore

> Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple :
Est-ce que le triangle EHI tel que $EH = 10,5\,cm$, $EI = 8\,cm$ et $HI = 6\,cm$ est un triangle rectangle ?

Dans le triangle EHI, $[EH]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} EH^2 = 10,5^2 = 110,25 \\ \\ EI^2 + IH^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \end{array}\right\} EH^2 \neq EI^2 + IH^2$$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle EHI n'est pas rectangle.

Activité : 5 page 140.
Exercices : 7 page 147 ; 26 page 149 ; 41 page 151 ; 65 page 153.

4e

8.1 Théorème de Pythagore

☐ ☐ 1 p 147
☐ ☐ 3 p 147
☐ ☐ 4 p 147
☐ ☐ 5 p 147
☐ ☐ 15 p 148
☐ ☐ 20 p 148
☐ ☐ 32 p 150
☐ ☐ 23 p 149
☐ ☐ 44 p 152
☐ ☐ 71 p 154

8.2 La réciproque du théorème de Pythagore

☐ ☐ 13 p 148
☐ ☐ 19 p 148

8.3 La contraposée du théorème de Pythagore

☐ ☐ Activité 5 p 140
☐ ☐ 7 p 147
☐ ☐ 26 p 149
☐ ☐ 41 p 151
☐ ☐ 65 p 153

4e

8.1 Théorème de Pythagore

☐ ☐ 1 p 147
☐ ☐ 3 p 147
☐ ☐ 4 p 147
☐ ☐ 5 p 147
☐ ☐ 15 p 148
☐ ☐ 20 p 148
☐ ☐ 32 p 150
☐ ☐ 23 p 149
☐ ☐ 44 p 152
☐ ☐ 71 p 154

8.2 La réciproque du théorème de Pythagore

☐ ☐ 13 p 148
☐ ☐ 19 p 148

8.3 La contraposée du théorème de Pythagore

☐ ☐ Activité 5 p 140
☐ ☐ 7 p 147
☐ ☐ 26 p 149
☐ ☐ 41 p 151
☐ ☐ 65 p 153

4e

8.1 Théorème de Pythagore

☐ ☐ 1 p 147
☐ ☐ 3 p 147
☐ ☐ 4 p 147
☐ ☐ 5 p 147
☐ ☐ 15 p 148
☐ ☐ 20 p 148
☐ ☐ 32 p 150
☐ ☐ 23 p 149
☐ ☐ 44 p 152
☐ ☐ 71 p 154

8.2 La réciproque du théorème de Pythagore

☐ ☐ 13 p 148
☐ ☐ 19 p 148

8.3 La contraposée du théorème de Pythagore

☐ ☐ Activité 5 p 140
☐ ☐ 7 p 147
☐ ☐ 26 p 149
☐ ☐ 41 p 151
☐ ☐ 65 p 153

4e

8.1 Théorème de Pythagore

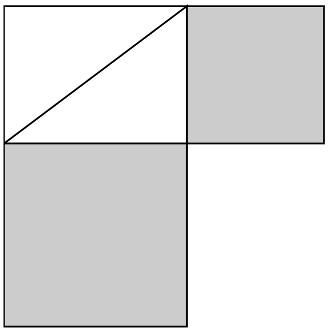
☐ ☐ 1 p 147
☐ ☐ 3 p 147
☐ ☐ 4 p 147
☐ ☐ 5 p 147
☐ ☐ 15 p 148
☐ ☐ 20 p 148
☐ ☐ 32 p 150
☐ ☐ 23 p 149
☐ ☐ 44 p 152
☐ ☐ 71 p 154

8.2 La réciproque du théorème de Pythagore

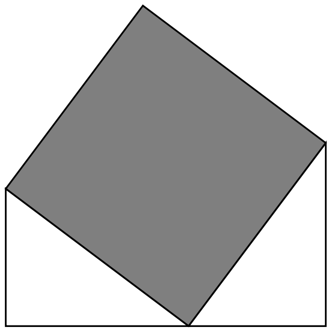
☐ ☐ 13 p 148
☐ ☐ 19 p 148

8.3 La contraposée du théorème de Pythagore

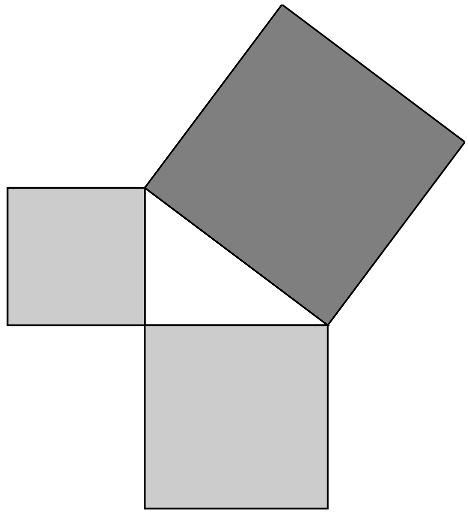
☐ ☐ Activité 5 p 140
☐ ☐ 7 p 147
☐ ☐ 26 p 149
☐ ☐ 41 p 151
☐ ☐ 65 p 153



1



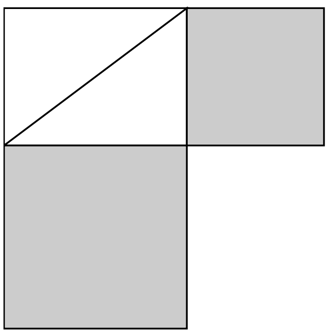
2



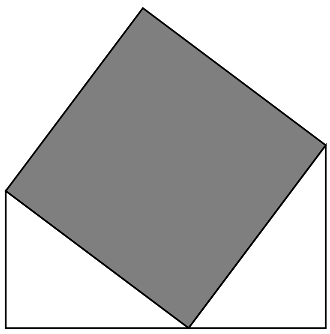
3

Découverte du théorème de Pythagore

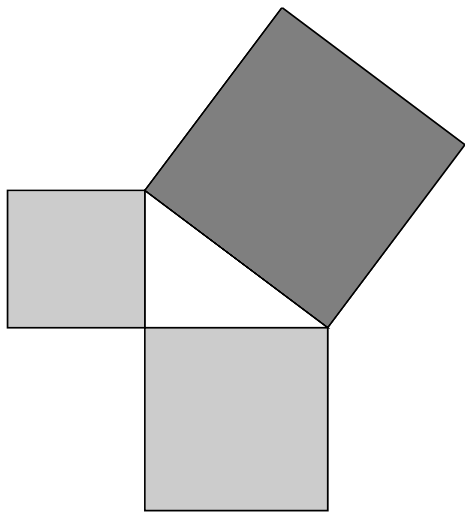
1. Découper les 4 pièces de la figure 1 puis les disposer de sorte qu'elles forment une figure identique à la figure 2 (on ne veut pas une figure "strictement" identique : même triangles aux mêmes endroits, etc...).
2. Coller les 2 figures identiques côte à côte.
3. Que peut-on dire des aires des figures 1 et 2 ?
4. Comparer la somme des aires des 2 petits carrés et l'aire du grand carré.
5. Sur la figure 3, on note a, b les mesures des côtés de l'angle droit du triangle rectangle et c la mesure de l'hypoténuse. Quelle égalité peut-on écrire d'après ce qui précède ?



1



2



3

Découverte du théorème de Pythagore

1. Découper les 4 pièces de la figure 1 puis les disposer de sorte qu'elles forment une figure identique à la figure 2 (on ne veut pas une figure "strictement" identique : même triangles aux mêmes endroits, etc...).
2. Coller les 2 figures identiques côte à côte.
3. Que peut-on dire des aires des figures 1 et 2 ?
4. Comparer la somme des aires des 2 petits carrés et l'aire du grand carré.
5. Sur la figure 3, on note a, b les mesures des côtés de l'angle droit du triangle rectangle et c la mesure de l'hypoténuse. Quelle égalité peut-on écrire d'après ce qui précède ?

Exercice 1

Recopie et complète les phrases suivantes :

1. Comme ABC est un triangle rectangle en B alors
$$\ldots^2 = \ldots^2 + \ldots^2$$
2. Comme DEF est un triangle rectangle en D alors
....
3. Comme IJK est un triangle rectangle en K alors
....
4. Comme RST est un triangle rectangle en S alors
....
5. Comme LMN est un triangle rectangle en L alors
....
6. Comme XYZ est un triangle rectangle en Y alors
....

Exercice 2

Construis un triangle ABC rectangle en A sachant que $AB = 4,8\,cm$ et $AC = 6,4\,cm$. Calcule ensuite la longueur BC.

Exercice 3

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 12\,cm$ et $AC = 16\,cm$.
Calcule la longueur BC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 35\,cm$ et $EF = 12\,cm$.
Calcule la longueur DF.
3. Soit IJK un triangle rectangle en K tel que $IK = 7\,cm$ et $JK = 2,4\,cm$.
Calcule la longueur IJ.
4. Soit LNM un triangle rectangle en M tel que $MN = 25,5\,cm$ et $LM = 3,2\,cm$.
Calcule la longueur LN.

Exercice 4

1. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 7,2\,cm$ et $BC = 15,3\,cm$. Calcule la longueur AC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $DE = 16,8\,cm$ et $EF = 23,2\,cm$. Calcule la longueur DF.
3. Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $IK = 44,9\,cm$ et $JK = 35,1\,cm$. Calcule la longueur IJ.
4. Soit LMN un triangle rectangle en L tel que $LM = 6,8\,cm$ et $MN = 6,89\,cm$. Calcule la longueur LN.

Exercice 5

1. Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 7,4\,cm$ et $BC = 6,5\,cm$.
Calcule un arrondi au mm de la longueur AC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 34,4\,cm$ et $EF = 72,8\,cm$.
Calcule un arrondi au mm de la longueur DF.

Exercice 6

1/ ABC est un triangle tel que $AB = 4,5\,cm$; $AC = 2,7\,cm$; $BC = 3,6\,cm$.
Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

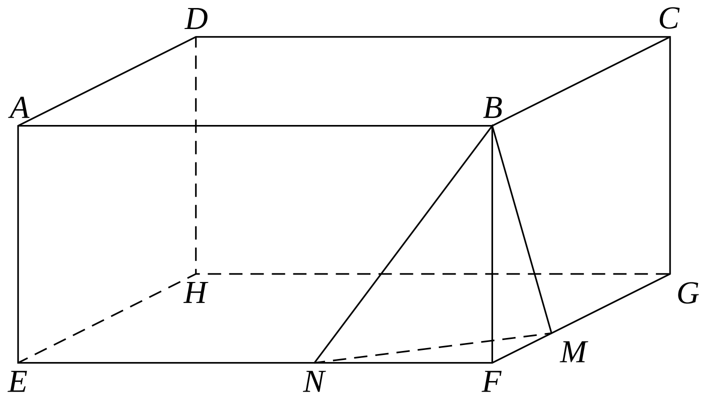
2/ DEF est un triangle tel que $DE = 28\,cm$; $DE = 35,1\,cm$; $EF = 44,9\,cm$.
Démontre que le triangle DEF est un triangle rectangle.

3/ IJK est un triangle tel que $IJ = 2,04\,cm$; $IK = 5,96\,cm$; $JK = 5,6$.
Démontre que le triangle IJK est un triangle rectangle.

4/ RST est un triangle tel que $RS = 76\,cm$; $ST = 76,1\,cm$; $RT = 3,9$.
Démontre que le triangle RST est un triangle rectangle.

⋆⋆

Exercice 7

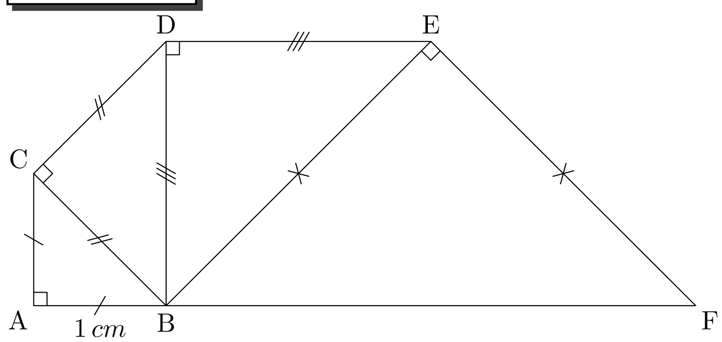


$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. On donne

$FE = 12\,cm$ $FG = 9\,cm$
$FB = 3\,cm$ $FN = 4\,cm$
$FM = 3\,cm$

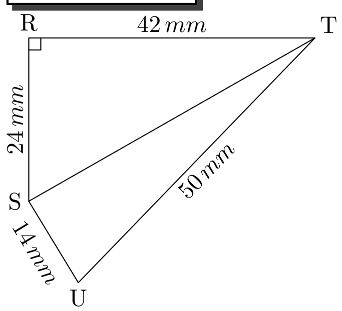
1. Construis la face $EFGH$ en vraie grandeur.
2. Construis un patron de ce parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
3. Calcule la longueur MN.
4. Calcule l'aire du triangle FMN.
5. Calcule la longueur EG puis déduis-en la longueur EC.

Exercice 8



Calcule les longueurs BC, BD, BE et BF.

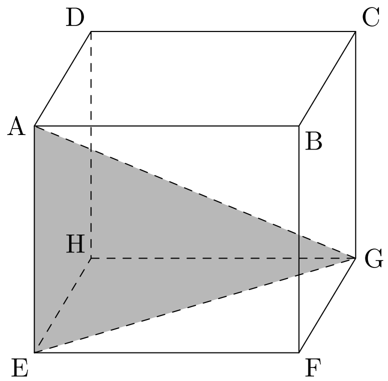
Exercice 9



1/ Construis en vraie grandeur la figure ci-contre.

2/ Le triangle STU semble rectangle. L'est-il vraiment ? Justifie la réponse.

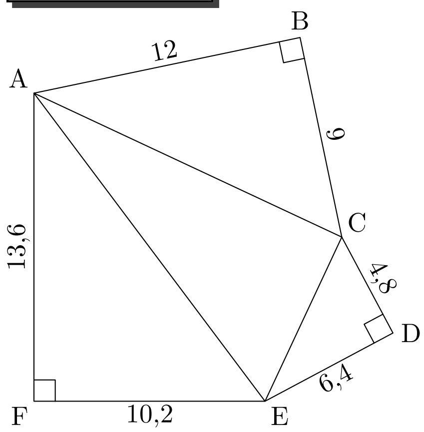
Exercice 10



Le dessin ci-contre représente, en perspective cavalière, un cube d'arête $3\,cm$.

1. (a) Quelle est, dans la réalité, la nature du triangle EFG ? Justifie la réponse.
   (b) Prouve que $EG^2 = 18$.
2. (a) Quelle est, dans la réalité, la nature du triangle AEG ? (On ne demande pas de preuve.)
   (b) Calcule la longueur de la diagonale $[AG]$ du cube, arrondie au millimètre.

Exercice 11



Sur la figure ci-contre les longueurs sont données en centimètre.

1/ Quelle est la nature du triangle ACE ? Justifie.

2/ Reproduis la figure à l'échelle 1/2.

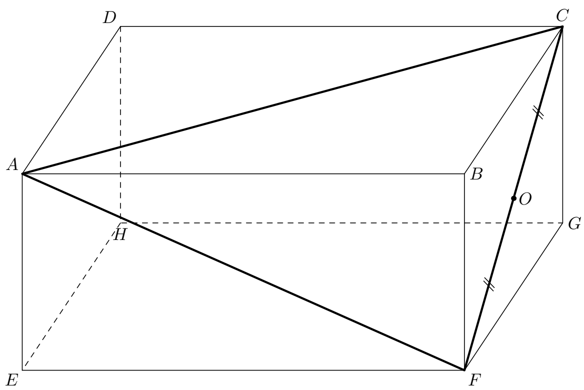
Exercice 12

Dans un rectangle de longueur $7\,cm$ et de largeur x, le périmètre est de $18\,cm$.

1. Quelle est la valeur de x ? Construire alors le rectangle en vrai grandeur.
2. Calculer la longueur de la diagonale d'un tel rectangle.

⋆ ⋆ ⋆

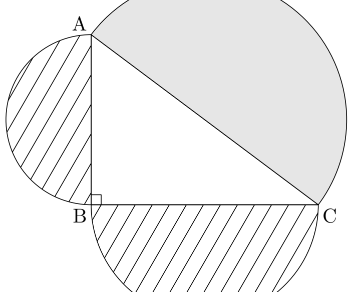
Exercice 13



Soit $ABCDEFGH$ le parallélépipède rectangle représenté ci-contre tel que $AB = 12\,cm$ et $BC = BF = 5\,cm$.

1. Calcule la longueur AC.
2. Quelle est la nature du triangle ACF ? Justifie.
3. Soit O le milieu du segment $[CF]$. Prouve que les droites (AO) et (CF) sont perpendiculaires.
4. Calcule la longueur AO. On calculera d'abord la longueur CO.
5. Quel est le volume, en litre, de ce parallélépipède rectangle ?

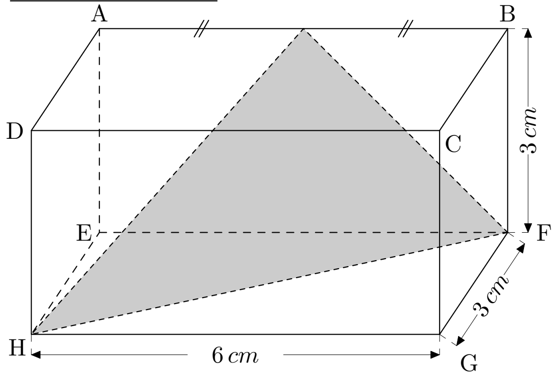
Exercice 14



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 4,8\,cm$ et $AC = 6,4\,cm$.

1. Calcule la longueur BC.
2. Montre que la somme des aires hachurées est égale à l'aire grisée.
3. En posant $AB = a$, $AC = b$ et $BC = c$, démontre que le résultat obtenu à la question 2 est vrai dans le cas général.

Exercice 15



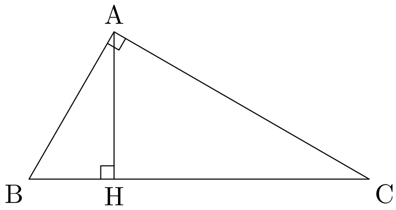
Dans le pavé droit ci-dessous, le point M est le milieu de l'arête $[AB]$.

1/ Est-il exact que $DM = MF = CF$?

2/ (a) Donne les valeurs exactes de MH^2, HF^2 et MF^2.

(b) Le triangle MFH est-il rectangle ? Justifie.

Exercice 16



Sur la figure ci-contre, on donne $AB = 6\,cm$ et $BH = 3\,cm$. Le segment $[AH]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse $[BC]$.

1. Calcule la longueur AH.
2. Sachant que HC est le triple de BH, calcule la longueur BC.
3. Calcule la longueur AC.
4. Calcule l'aire du triangle ABC.
5. Reproduis la figure en vraie grandeur. On appellera O le milieu du segment $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport au point O.
6. Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'C$? Justifie la réponse.

Chapitre 3

Calcul littéral

Sommaire

Programme 2004

Calcul littéral.		L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en recherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul.
	Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x-(4x-2)$, $2x^2-3x+x^2$...	Le travail proposé s'articule sur deux axes : - utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques - utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. Les situations proposées aux élèves doivent exclure tout type de virtuosité et répondre chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique). On évitera en particulier les expressions à plusieurs variables introduites a priori.
Développement.	Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a+b)(c+d)$. Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	Les activités de développement poursuivent celles de 5^{e}en utilisant l'identité $k(a+b)=ka+kb$. L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prendra tout son intérêt. Le développement de certaines expressions du type $(a+b)(c+d)$ peut conduire à des simplifications d'écriture, mais les identités remarquables ne sont pas au programme. L'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas ce type d'expression en une somme de termes. La factorisation d'expressions analogues à $x(3x+4)-5(3x+4)$ n'est pas au programme.

Un expression littérale est une expression mathématique qui contient une (ou des) lettre(s). Par exemple, $2x+3$, $-3y+5t$,...

I. Simple distributivité

Soit k, a et b 3 expressions quelconques. Alors

développement

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

factorisation

Exemples Développer $C = 3(x+1)$ et $D = -4(1-x)$

$C = 3(x+1) \qquad (k = 3; a = x; b = 1)$
$C = 3 \times x + 3 \times 1 \qquad (k \times a + k \times b)$
$C = 3x + 3$

$D = -4(1-x) \qquad (k = -4; a = 1; b = -x)$
$D = -4 \times 1 + (-4) \times (-x) \qquad (k \times a + k \times b)$
$D = -4 + 4x$

Application : Regroupement de termes

Exemples :

$A = 2x + 3x$	$B = 5x - 8x$	$C = 4x^2 + 7x - 2x^2 + 3x$
$A = (2+3)x$	$B = (5-8)x$	$C = (4-2x)^2 + (7+3)x$
$A = 5x$	$B = -3x$	$C = 2x^2 + 10x$

Activité : 7 page 109 (b. et c).

Exercice : 12 page 115 ; 3 et 4 page 114.

II. Suppression de parenthèses

Règle 1 Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe + (ainsi que ce +) sans changer l'expression entre parenthèses.

Exemples $\quad a + (b+c) = a + b + c \qquad a + (-b+c) = a - b + c \qquad (a+b) - c = a + b - c$

Règle 2 Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe − (ainsi que ce −) à condition de changer **tous** les signes de l'expression entre parenthèses.

Exemples $\quad a - (b+c) = a - b - c \qquad a - (-b+c) = a + b - c$

III. Réduction d'une expression littérale

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire le plus simplement possible avec le moins de termes possibles.

Exemples

Réduire l'expression $A = 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1)$

$$\begin{aligned}
A &= 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1)\\
A &= 3x^2 + x - x^2 - 3x + 1\\
A &= 3x^2 - x^2 + x - 3x + 1\\
A &= 2x^2 - 2x + 1
\end{aligned}$$

Développer et réduire $B = 3(x + 1) + 2(-x + 2)$

$$\begin{aligned}
B &= 3(x + 1) + 2(-x + 2)\\
B &= 3 \times x + 3 \times 1 + (2 \times (-x) + 2 \times 2)\\
B &= 3x + 3 + (-2x + 4)\\
B &= 3x + 3 - 2x + 4\\
B &= 3x - 2x + 3 + 4\\
B &= x + 7
\end{aligned}$$

Activités : 3 page 107 et 4 page 108.

Exercices : 10, 13, 14 et 15 page 115 ; 19, 20 et 21 page 116 ; 31 page 117.

IV. Double distributivité

Activité : 9 page 110.

Soit a, b, c et d 4 expressions mathématiques. Alors

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemples

$$\begin{aligned}
A &= (x + 2) \times (x + 3)\\
A &= x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3\\
A &= x^2 + 3x + 2x + 6\\
A &= x^2 + 5x + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (2x + 3) \times (x - 5)\\
B &= 2x \times x + 2x \times (-5) + 3 \times x + 3 \times (-5)\\
B &= 2x^2 + (-10x) + 3x + (-15)\\
B &= 2x^2 - 10x + 3x - 15\\
B &= 2x^2 - 7x - 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= (3x - 1) \times (5 - 2x)\\
C &= 3x \times 5 + 3x \times (-2x) + (-1) \times 5 + (-1) \times (-2x)\\
C &= 15x + (-6x^2) + (-5) + 2x\\
C &= 15x - 6x^2 - 5 + 2x\\
C &= -6x^2 + 17x - 5
\end{aligned}$$

Exercices : 16 page 115 ; 41 page 118 ; 47, 49 et 52 page 119 ; 63 page 120.

4$^{\mathbf{e}}$

9.1 Simple distributivité

☐ ☐ Activité 7 p 109 (b. et c.)
☐ ☐ 12 p 115
☐ ☐ 3 p 114
☐ ☐ 4 p 114

9.2 Suppression des parenthèses

9.3 Réduction d'une expression littérale

☐ ☐ Activité 3 p 107
☐ ☐ Activité 4 p 108
☐ ☐ 10 p 115
☐ ☐ 13 p 115
☐ ☐ 14 p 115
☐ ☐ 15 p 115
☐ ☐ 19 p 116
☐ ☐ 20 p 116
☐ ☐ 21 p 116
☐ ☐ 31 p 117

9.4 Double distributivité

☐ ☐ Activité 9 p 110
☐ ☐ 16 p 115
☐ ☐ 41 p 118
☐ ☐ 47 p 119
☐ ☐ 49 p 119
☐ ☐ 52 p 119
☐ ☐ 63 p 120

4$^{\mathbf{e}}$

9.1 Simple distributivité

☐ ☐ Activité 7 p 109 (b. et c.)
☐ ☐ 12 p 115
☐ ☐ 3 p 114
☐ ☐ 4 p 114

9.2 Suppression des parenthèses

9.3 Réduction d'une expression littérale

☐ ☐ Activité 3 p 107
☐ ☐ Activité 4 p 108
☐ ☐ 10 p 115
☐ ☐ 13 p 115
☐ ☐ 14 p 115
☐ ☐ 15 p 115
☐ ☐ 19 p 116
☐ ☐ 20 p 116
☐ ☐ 21 p 116
☐ ☐ 31 p 117

9.4 Double distributivité

☐ ☐ Activité 9 p 110
☐ ☐ 16 p 115
☐ ☐ 41 p 118
☐ ☐ 47 p 119
☐ ☐ 49 p 119
☐ ☐ 52 p 119
☐ ☐ 63 p 120

4$^{\mathbf{e}}$

9.1 Simple distributivité

☐ ☐ Activité 7 p 109 (b. et c.)
☐ ☐ 12 p 115
☐ ☐ 3 p 114
☐ ☐ 4 p 114

9.2 Suppression des parenthèses

9.3 Réduction d'une expression littérale

☐ ☐ Activité 3 p 107
☐ ☐ Activité 4 p 108
☐ ☐ 10 p 115
☐ ☐ 13 p 115
☐ ☐ 14 p 115
☐ ☐ 15 p 115
☐ ☐ 19 p 116
☐ ☐ 20 p 116
☐ ☐ 21 p 116
☐ ☐ 31 p 117

9.4 Double distributivité

☐ ☐ Activité 9 p 110
☐ ☐ 16 p 115
☐ ☐ 41 p 118
☐ ☐ 47 p 119
☐ ☐ 49 p 119
☐ ☐ 52 p 119
☐ ☐ 63 p 120

4$^{\mathbf{e}}$

9.1 Simple distributivité

☐ ☐ Activité 7 p 109 (b. et c.)
☐ ☐ 12 p 115
☐ ☐ 3 p 114
☐ ☐ 4 p 114

9.2 Suppression des parenthèses

9.3 Réduction d'une expression littérale

☐ ☐ Activité 3 p 107
☐ ☐ Activité 4 p 108
☐ ☐ 10 p 115
☐ ☐ 13 p 115
☐ ☐ 14 p 115
☐ ☐ 15 p 115
☐ ☐ 19 p 116
☐ ☐ 20 p 116
☐ ☐ 21 p 116
☐ ☐ 31 p 117

9.4 Double distributivité

☐ ☐ Activité 9 p 110
☐ ☐ 16 p 115
☐ ☐ 41 p 118
☐ ☐ 47 p 119
☐ ☐ 49 p 119
☐ ☐ 52 p 119
☐ ☐ 63 p 120

Exercice 1

Ecris en fonction de x :

1. le double de x augmenté de 1 ;
2. la somme de 3 et du triple de x ;
3. le tiers de x diminué de 5 ;
4. le produit de 5 par la somme de x et de 4 ;
5. la somme de 6 et du produit de 7 par x.

Exercice 2

La distance de freinage d'un véhicule jusqu'à l'arrêt total est donnée par la formule

$$D = \frac{4V^2}{1000K}$$

D : distance de freinage en m.
V : vitesse du véhicule en km/h.
K : coefficient d'adhérence de la route.

Calcule la distance de freinage pour qu'un véhicule qui roule à 110 km/h sur une route dont le coefficient d'adhérence est 0,25 puisse s'arrêter totalement.

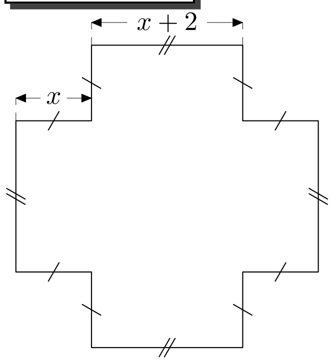
Exercice 3

Ecris le plus simplement possible les expressions suivantes.

$A = (x+5) - (5-y)$ $\quad B = x - (-5+y) - 5$ $\quad C = x - (-y+5) - 5$

$D = (x-5) - (-y-5)$ $\quad E = -(5-x) + 5 - y$ $\quad F = (-5+y) - (-5-x)$

Exercice 4



1. Ecris le périmètre de la figure ci-contre en fonction de x.
2. Calcule le périmètre de la figure pour toutes les valeurs entières paires de x de 1 à 10.

Exercice 5

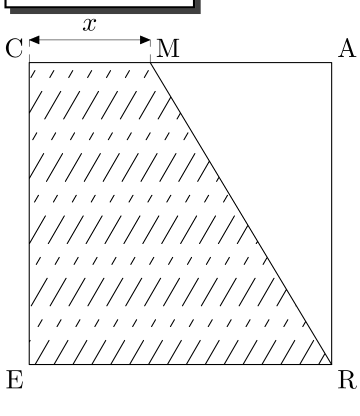
Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = 3(x+5)$ $\quad B = -4(x+3)$ $\quad C = -2(t-9)$

$D = 5(2a+4)$ $\quad E = 7 + 2(3x+1)$ $\quad F = -3a + 5(2-a)$

$G = 4(8+3x) + 5(8-x)$ $\quad H = 3(2x+1) - 2(6x-1)$

Exercice 6



Sur la figure ci-contre, $CARE$ est un carré de côté $8\,cm$. M est un point du segment $[AC]$ tel que $CM = x$ (en cm).

1. Exprime en fonction de x la longueur AM.
2. Exprime en fonction de x l'aire du trapèze $CMRE$.
3. Calcule cette aire pour $x = 2$.

Exercice 7

Voici un programme de calcul : *choisir un nombre, le multiplier par 3, retrancher 2, multiplier le tout par 5, ajouter 10.*

1. Applique ce programme de calculs aux nombres 3 ; -1 et $\dfrac{2}{3}$.
2. Quelle remarque peut-on faire ? Cette remarque est-elle toujours vraie ? *On pourra choisir x comme valeur de départ.*

Exercice 8

Développe et réduis les expressions suivantes.

$$A = (x+2)\times(x+3) \qquad B = (2x+1)(x+4)$$
$$C = (3x+1)(x-2) \qquad D = (3-x)(x-1)$$
$$E = 2x + 3(5x-2) \qquad F = (2x+3)(3x+2) + 7x^2 - 2x + 3$$

Exercice 9

Applique le programme de calcul ci-dessous en prenant 5, puis 9, puis -2, puis x comme nombre de départ. Quelle observation peut-on faire ?

Programme de calcul

- Choisir un entier relatif.
- Calculer le produit de son suivant immédiat par son précédent immédiat.
- Ajouter 1.
- Retrancher le carré du nombre de départ.
- Annoncer le résultat.

——— ⋆⋆ ———

Exercice 10

1. Réduis les expressions suivantes :
$$O = -6 + x - 3 + 2x \qquad P = -2x - (x+1) \qquad R = 4x + (2x-1) - (2x-4)$$
2. Développe et réduire les expressions suivantes :
$$S = 3(2+4x) \qquad T = 1 - 2(x+4) \qquad U = 2(x-1) + 3(2-2x)$$
3. Donne les valeurs de O, P, R, S, T, U pour la valeur $x = -1$.

Exercice 11

Deux élèves ont développé et réduit l'expression $A = 5x(2-x) - 3x^2$.

1. Brigitte a répondu $A = 2x^2 + 10x$. Teste cette égalité pour $x = 2$.
   Que peux-tu conseiller à Brigitte ?
2. Alain a répondu $A = 6x - 6x^2$
   (a) Teste cette égalité pour $x = 2$. La réponse d'Alain te semble-t-elle correcte ?
   (b) Teste cette égalité pour $x = 1$. Que conseilles-tu alors à Alain ?
3. Donne le bon développement de l'expression A.

Exercice 12

1. Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = (x+3)\times(x+2) \qquad B = (2x-1)^2$$
$$C = 1 + (x+3)\times(2x+4) \quad D = x + 4 - (x-1)\times(x+1)$$

2. Calcule la valeur de A pour $x = 1$ et celle de B pour $x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13

1. Pense à un nombre (par exemple 5). Ajoute 7 à ce nombre. Multiplie le résultat par 3. Retranche 20 au résultat. Retranche le triple du nombre auquel tu as pensé. Divise le résultat par 2.
Combien trouves-tu ?
2. Démontre que quel que soit le nombre que tu choisis au départ, le résultat trouvé est le même (on pourra appeller x le nombre du départ).

Exercice 14

Soit un segment $[AB]$ de longueur x (en centimètre). Un rectangle a les dimensions suivantes : sa largeur mesure $3\,cm$ de plus que la longueur $[AB]$ et sa longueur mesure le double de sa largeur.

1. Ecris en fonction de x le périmètre du rectangle.
2. Démontre que le périmètre de ce rectangle est le triple de sa longueur.

Exercice 15

1. Simplifie les expressions suivantes :

$$A = (5x+2) - (6x+4) \qquad B = (-3x-4) - (-8x+3)$$
$$C = -(5+3x) + (-x+4) \qquad D = (-5x+3) + (4x-5)$$

2. Développe et réduis les expressions suivantes :

$$E = 2(3c-5) - 6(4c+3) \quad F = 5(-4c+2) + 2(3c-4)$$

Exercice 16

Dans un porte-monnaie, il y a 23 pièces. Il n'y a que des pièces de 10 francs et des pièces de 5 francs.
On appelle x le nombre de pièces de 10 francs.

1. Exprime, fonction de x le nombre de pièces de 5 francs.
2. Montre et explique pourquoi la somme d'argent S_1 que représentent les pièces de 10 francs est $S_1 = 10\times x$.
3. Exprime, en fonction de x, la somme S_2 que représentent les pièces de 5 francs.
4. Exprime, en fonction de x, la somme d'argent S qu'il y a dans le porte-monnaie.
Développe et réduis l'expression de S.
5. Si $x = 11$, que vaut S ?

Exercice 17

Voici un message codé

Δ	$\forall$	$\exists$	&	$\star$	Ω	Φ	Ψ	$\otimes$	$\emptyset$	Σ	@	θ	$\square$

A chaque expression de la colonne de gauche, associe l'expresion de la colonne de droite qui lui est égale. Utilise alors les lettres trouvées pour décoder le message.

Δ $6x - 7 + 9x + 4$	$\exists$ $4x^2 - 3x + 7 + 6x + 5x^2 + 2$
$\forall$ $-5x - 3 + 2x - 5$	& $2(3x+5) + 4(2x-3)$

$\star$ $\quad -3(4x-2)-2(3x-4)$	$10x-2$ (L)
Ω $\quad 2x(5x+3)-(8x^2+2)$	$10x^2+14x-12$ (R)
Φ $\quad 2(5x-3)+4$	$-5x^2+3x-6$ (E)
Ψ $\quad 3(7x-5)-(2x+4)\times 2$	$15x-3$ (F)
$\otimes$ $\quad 4x^2-2-(9x^2-3x+4)$	$-8x^2+24x-8$ (I)
$\emptyset$ $\quad (5x-3)(2x+4)$	$9x^2+3x+9$ (N)
Σ $\quad 4x-2(3x-5)$	$-2x+10$ (C)
@ $\quad (3x-2)(-6x+4)+10x^2$	$2x^2+6x-2$ (E)
θ $\quad (4-5x)(2x-8)+2x^2-3$	$-3x-8$ (I)
$\square$ $\quad 5x+(3-2x)(2+5x)+4$	$-10x^2+16x+10$ (E)
$14x-2$ (D)	$-18x+14$ (E)
$17x-23$ (X)	$-8x^2+48x-35$ (C)

Exercice 18

L'abonnement dans une bibliothèque est de 20€ par an. Il faut payer en plus 0,35€ par livre emprunté.

1/ Si le nombre de livres empruntés est 10, quelle sera la dépense ?

2/ Soit x le nombre de livres empruntés par Stéphanie en 2002.

(a) Exprime, en fonction de x, le prix payé par Stéphanie en 2002.

(b) Elle constate, à la fin de l'année 2002, qu'elle a dépensé 34€ pour la bibliothèque. Combien a-t-elle lu de livres de la bibliothèque ?

Exercice 19

Stéphanie, Pierre et Loïc ont de l'argent dans les poches. Stéphanie a 3€ de plus que Pierre. Loïc a 2 fois plus d'argent que Stéphanie.
Stéphanie et Loïc mettent leur argent en commun et constatent qu'ils ont 6 fois plus d'argent que Pierre.

1/ Soit x la somme d'argent de Pierre. Que représente chacune des expressions suivantes :

$$A=2(x+3) \qquad B=x+3 \qquad C=x+3+2(x+3)$$

2/ Trouve la somme d'argent de Pierre. Déduis-en alors les sommes d'argent de Stéphanie et Loïc.

Exercice 20

1. Réduis les expressions suivantes :

$$A=(8+x)-(3-x) \qquad B=a-5-(3+a)+(a+4)$$
$$C=(3x^2-6)-(1+x^2) \qquad D=2x^2+x+(3x-x^2)$$

2. Développe et réduis les expressions suivantes :

$$E=3(x+1)+4x+1 \qquad F=x+3(x+4)$$
$$G=x-5(x+5) \qquad H=1+3(2-x)$$

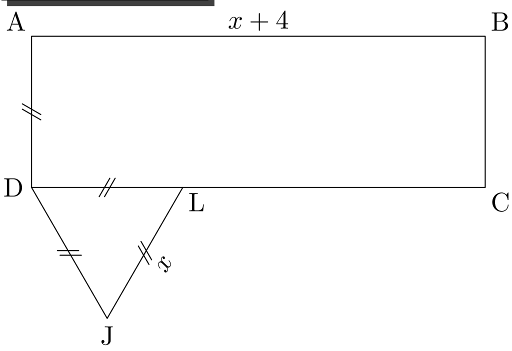
Exercice 21

1. Développe et réduis les expressions suivantes

$$A=8+4(x-3) \qquad B=1-3(x+2)$$
$$C=\frac{1}{2}(x-8)+5 \qquad D=2(2-4x)+4(1-x)$$
$$E=3(x+3)-2(3x-1) \qquad F=-4(x+1)+x(2-x)$$

2. Calcule chacune des expressions pour $x=3$, en utilisant l'écriture qui parait la plus simple.

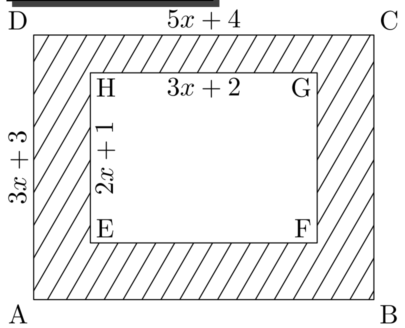
Exercice 22



La figure ci-contre comporte un triangle équilatéral et un rectangle.

1. Exprime le périmètre de cette figure en fonction de x.
2. Si $x = 3$, quel est le périmètre de cette figure ?

Exercice 23



Sur la figure ci-contre, toutes les dimensions sont exprimées en centimètre et les quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$ sont des rectangles.

1/ Si $x = 2$, quelle est l'aire de la partie hachurée ?

2/ Exprime l'aire de la partie hachurée en fonction de x. Développe et réduis l'expression trouvée.

3/ Utilise la formule de la question 2 pour calculer l'aire de la partie hachurée pour $x = 2$.

⋆⋆⋆

Exercice 24

Développe et réduis les expressions suivantes

$$G = (x+3)(x+4) \qquad H = (2x-1)(3x+5) \qquad I = (x+1)^2 - (2x+4)$$

Exercice 25

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6\,cm, BC = 10\,cm$.

1. Soit M un point du segment $[BC]$ tel que $BM = x$.
   On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle AMD.
   (a) Exprime, en fonction de x, l'aire du triangle rectangle AMB.
   (b) Exprime, en fonction de x, l'aire du triangle rectangle DMC.
   (c) Déduis-en l'expression de $\mathcal{A}$ en fonction de x. Que remarque-t-on ?
2. On considère maintenant le rectangle $ABCD$ et les points E et F respectivement sur les segments $[AB]$ et $[DC]$ tel que $AE = DF = x$. Soit I le milieu du segment $[AD]$ (on fera une nouvelle figure).
   Montre que l'aire $\mathcal{B}$ du pentagone $BEIFC$, exprimée en cm^2 est

$$\mathcal{B} = 60 - 5x$$

Exercice 26

1. Exprime le périmètre de la figure hachurée en fonction de la variable c.
2. Quelle est la valeur de ce périmètre lorsque $c = 3\,cm$?
3. Exprime l'aire de la figure hachurée en fonction de la variable c.
4. Quelle est la valeur de cette aire si le côté du carré est de $8\,cm$?

Exercice 27

1. (a) Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = (x+2)(2x+5) \qquad B = (3x-4)(2x-3)$$
$$C = (2x-1)(3x+4) + (2x+1)(3x-4) \qquad D = (x+1)^2 - (2x+3)^2$$

   (b) Calcule la valeur de C et D pour $x = 1$ puis pour $x = -1$.

2. (a) Développe et réduis l'expression suivante $E = (x+2)(x-1) - x^2$.

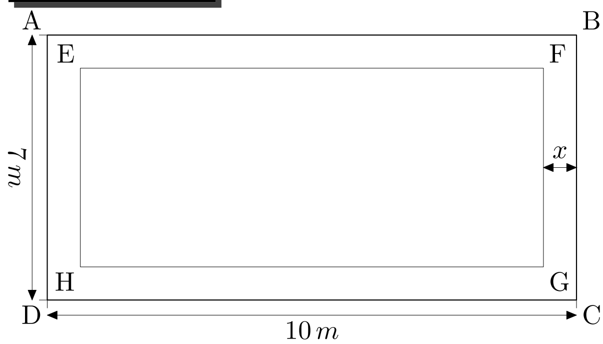
   (b) Explique comment, sans calculatrice, obtenir le produit $20\,002 \times 19\,999 - 20\,000^2$?

Exercice 28

Un groupe d'amis collectionne des cartes de téléphone. Stéphane en a x. Calire en a deux fois plus que Stéphane. Jérôme en a 5 de moins que Stéphane. Céline en a deux de plus que Stéphane. Cyril en a trois fois plus que Jérôme. Amélie en a deux fois plus que Céline.

1. Ecris, en fonction de x, le nombre total de cartes possédées par le groupe d'amis.
2. Si Stéphane a 10 cartes, quel est le nombre de cartes possédées par le groupe d'amis.

Exercice 29



La figure ci-contre représente une piscine rectangulaire $ABCD$ de 10 mètres sur 7 mètres. Cette piscine a une bordure de largeur x (en mètre).

1. Exprime en fonction de x l'aire du bassin $EFGH$ en fonction de x.
2. Si la bordure a une largeur de $0,75\,m$, quelle est l'aire du bassin ?

Chapitre 4

Triangle rectangle et cercle

Sommaire

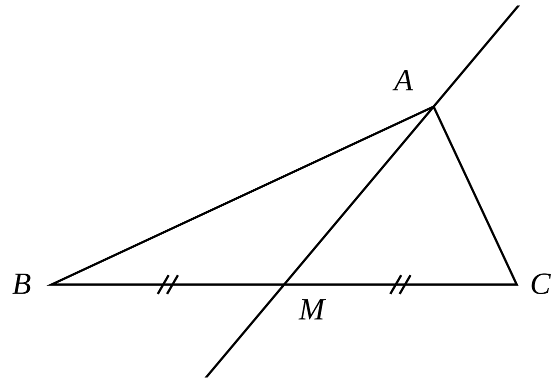
Programme 2004

Cercle circonscrit	Caractériser le triangle rectangle : - par son inscription dans un demi-cercle. Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.	On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés.

I. Médiane dans un triangle

Définition :
Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

La droite (AM) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.
Remarque : le segment $[AM]$ est aussi appelé médiane.



Activité : 1 page 157

II. Cercle circonscrit à un triangle

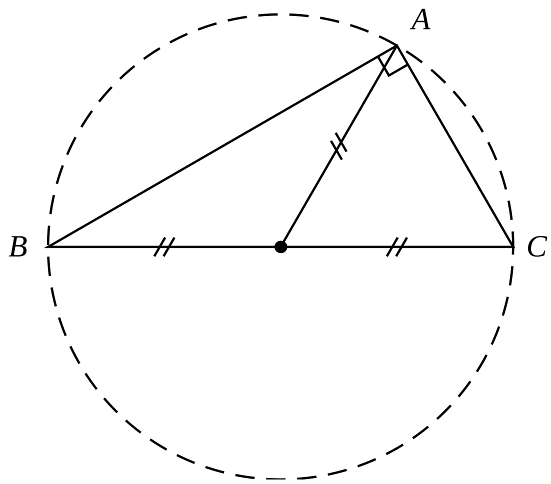
Rappel

Définition :
Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le cercle passant par les 3 sommets du triangle. Son centre est le point d'intersection des 3 médiatrices du triangle.

Le triangle ABC est **inscrit** dans le cercle $\mathcal{C}$ si le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle ABC.

Activité : 1 (feuille)

> Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en A, O est le milieu de $[BC]$.
Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a donc $OA = OB = OC$, donc $OA = \frac{1}{2}BC$.

Cette égalité donne une nouvelle propriété importante :

> Si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

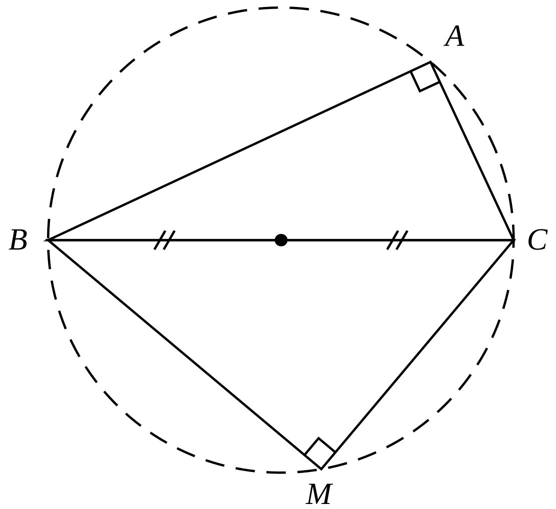
Exercices : 1 (sauf 3. et 4.), 3, 6 et 8 page 165, 29, 31, 32, 33 page 168 et 40 p 169.

III. Triangle rectangle inscrit dans un cercle

Activité : 2 (feuille)

> Si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

Exemple :



A, B et C sont 3 points du cercle, $[BC]$ est un diamètre de ce cercle.
Si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.
Donc le triangle ABC est rectangle en A.

De même, comme M est un point du cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle MBC est rectangle en M.

Exercices : 37 et 38 page 168, 41 et 48 p 169 ; 28(a) page 167.

4^{e}

I Médiane dans un triangle

☐ ☐ Activité 1 p 157 (sauf d.)

II Cercle circonscrit à un triangle

☐ ☐ Activité 2 p 157
☐ ☐ 1 p 165 sauf (3. et 4.)
☐ ☐ 3 p 165
☐ ☐ 6 p 165
☐ ☐ 8 p 165
☐ ☐ 29 p 168
☐ ☐ 31 p 168
☐ ☐ 32 p 168
☐ ☐ 33 p 168
☐ ☐ 40 p 169

III Triangle inscrit dans un cercle

☐ ☐ 37 p 168
☐ ☐ 38 p 168
☐ ☐ 41 p 169
☐ ☐ 48 p 169
☐ ☐ 28(a) p 170

4^{e}

I Médiane dans un triangle

☐ ☐ Activité 1 p 157 (sauf d.)

II Cercle circonscrit à un triangle

☐ ☐ Activité 2 p 157
☐ ☐ 1 p 165 sauf (3. et 4.)
☐ ☐ 3 p 165
☐ ☐ 6 p 165
☐ ☐ 8 p 165
☐ ☐ 29 p 168
☐ ☐ 31 p 168
☐ ☐ 32 p 168
☐ ☐ 33 p 168
☐ ☐ 40 p 169

III Triangle inscrit dans un cercle

☐ ☐ 37 p 168
☐ ☐ 38 p 168
☐ ☐ 41 p 169
☐ ☐ 48 p 169
☐ ☐ 28(a) p 170

4^{e}

I Médiane dans un triangle

☐ ☐ Activité 1 p 157 (sauf d.)

II Cercle circonscrit à un triangle

☐ ☐ Activité 2 p 157
☐ ☐ 1 p 165 sauf (3. et 4.)
☐ ☐ 3 p 165
☐ ☐ 6 p 165
☐ ☐ 8 p 165
☐ ☐ 29 p 168
☐ ☐ 31 p 168
☐ ☐ 32 p 168
☐ ☐ 33 p 168
☐ ☐ 40 p 169

III Triangle inscrit dans un cercle

☐ ☐ 37 p 168
☐ ☐ 38 p 168
☐ ☐ 41 p 169
☐ ☐ 48 p 169
☐ ☐ 28(a) p 170

Activité 1 : Cercle circonscrit à un triangle rectangle

1. Construis trois triangles rectangles et leur cercle circonscrit. Où semblent être placés les centres de ces cercles ?

   Il semble que ....
   ....

2. Tracer un triangle ABC rectangle en A. Appelons O le milieu du segment $[BC]$ et soit E le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un parallélogramme.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un rectangle.
   (c) Que peut-on dire des longueurs OA, OB et OC ? Justifie.
   (d) Que représente donc le point O pour le triangle ABC ?

   Si un triangle est rectangle alors ....
   ....

Activité 1 : Cercle circonscrit à un triangle rectangle

1. Construis trois triangles rectangles et leur cercle circonscrit. Où semblent être placés les centres de ces cercles ?

   Il semble que ....
   ....

2. Tracer un triangle ABC rectangle en A. Appelons O le milieu du segment $[BC]$ et soit E le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un parallélogramme.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un rectangle.
   (c) Que peut-on dire des longueurs OA, OB et OC ? Justifie.
   (d) Que représente donc le point O pour le triangle ABC ?

   Si un triangle est rectangle alors ....
   ....

Activité 1 : Cercle circonscrit à un triangle rectangle

1. Construis trois triangles rectangles et leur cercle circonscrit. Où semblent être placés les centres de ces cercles ?

   Il semble que ....
   ....

2. Tracer un triangle ABC rectangle en A. Appelons O le milieu du segment $[BC]$ et soit E le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un parallélogramme.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABEC$ est un rectangle.
   (c) Que peut-on dire des longueurs OA, OB et OC ? Justifie.
   (d) Que représente donc le point O pour le triangle ABC ?

   Si un triangle est rectangle alors ....
   ....

Activité 2 : Comment obtenir un triangle rectangle à partir d'un cercle ?

1. Soit un cercle de centre O et de rayon $4\,cm$. Essayer de construire un triangle rectangle dont tous les sommets sont sur le cercle.

> *Il semble* ....
> ....

2. Comment prouver cette idée ?
   (a) Quelles sont les données de cette idée ? Fais une figure qui correspond à ces données :
   – Trace un cercle de diamètre $[RT]$.
   – Place un point S sur le cercle.
   – Construis le point U, diamétralement opposé au point S.

   (b) Complète l'organigramme de démonstration ci-dessous.

$[RT]$ est un ....du cercle.

$[SU]$ est un ....du cercle.

Si un quadrilatère a . ... alors ....

Le quadrilatère ....est ....

$[RT]$ est un ....du cercle.

$[SU]$ est un ....du cercle.

Les longueurs ...et ...sont ....

Un ....possédant des.............................. ....est un ....

Le quadrilatère ......est un ....

Le triangle ......est ....

> *Dans un cercle, on obtient un triangle rectangle en*..................................
> ....

⋆

Exercice 1

Soit EFC un triangle tel que $EF = 6\,cm$, $EC = 4\,cm$, $FC = 8\,cm$. Dans le triangle EFC, la hauteur issue de E coupe la droite (FC) en E' et la hauteur issue de F coupe la droite (EC) en F'.

1. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $EE'F$? Quel est le rayon de ce cercle ?
2. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $FF'E$? Quel est le rayon de ce cercle ?
3. Explique alors pourquoi les points E, F, E', F' sont sur un même cercle.

Exercice 2

Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et $[BC]$ un diamètre de ce cercle. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on place un point I tel que $\widehat{BCI} = 23^\circ$.

1. Fais une figure.
2. Calcule la mesure des angles $\widehat{IBO}$, $\widehat{IOC}$, $\widehat{OIC}$, $\widehat{OIB}$ et $\widehat{IOB}$.

⋆⋆

Exercice 3

Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AA']$ tel que $AA' = 10\,cm$. Place ensuite le point M' sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $AM' = 6\,cm$ et B, le point du segment $[AA']$ tel que $AB = 2\,cm$.
La perpendiculaire à la droite (AM') passant par B coupe la droite (AM') en M.
Démontre que les droites (MB) et$(A'M')$ sont parallèles.

Exercice 4

Soit P, A, U trois points alignés. Une droite passant par A coupe le cercle de diamètre $[PA]$ en I et le cercle de diamètre $[AU]$ en T.
Démontre que les droites (PI) et (UT) sont parallèles.

Exercice 5

Soit deux droites (AB) et (d) perpendiculaires en C. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour diamètre $[CB]$ et D est un point d'intersection de la droite (d) et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Construis la figure avec $AB = 8\,cm$ et $AC = 3\,cm$.
2. Le cercle $\mathcal{C}'$ et le segment $[BD]$ se coupent en E. Montre que les droites (AD) et (CE) sont parallèles.
3. La perpendiculaire en D à la droite (CD) coupe la droite (CE) en F. Montre que le quadrilatère $ACFD$ est un parallélogramme.

Exercice 6

1. Construis un triangle ULM tel que $UM = 8\,cm$, $UL = 7\,cm$ et $LM = 6\,cm$. Trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[UM]$. Ce cercle coupe le segment $[UL]$ en U et I et le segment $[LM]$ en M et J.
2. Montre que les triangles UIM et UJM sont rectangles.
3. Les segments $[UJ]$ et $[MI]$ se coupent en H.
   Montre que le point I est un point du cercle $\mathcal{C}_2$ de diamère $[UH]$ et J est un point du cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[MH]$.

Exercice 7

1. Trace un triangle RST rectangle en S et place le milieu M du segment $[RT]$. Trace le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[SM]$. Il coupe les segment $[RS]$ en I, le segment $[ST]$ en J et le segment $[RT]$ en H.
2. Montre que la droite (SH) est la hauteur du triangle RST relative au segment $[RT]$.
3. Montre que le quadrilatère $SIMJ$ est un rectangle.

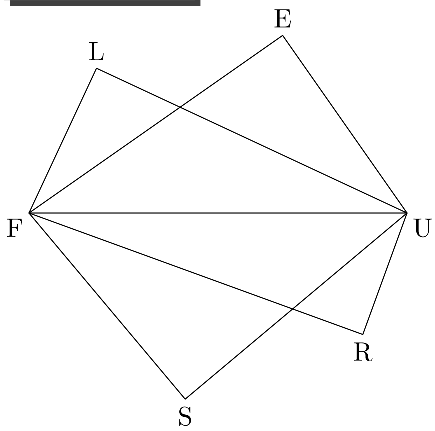
⋆⋆⋆

Exercice 8

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon $4\,cm$. Deux points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $(\mathcal{C})$. Le point D est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $BD = 2\,cm$. Le point E est le symétrique du point B par rapport au point D.

1. Démontre que la droite (AD) est la médiatrice du segment $[EB]$.
2. Soit F le symétrique du point O par rapport à la droite (AD).
   Démontre que les points A, F et E sont alignés.
3. Détermine la nature du quadrilatère $AODF$.

Exercice 9



Dans la figure ci-contre, on a :

$$\widehat{LFE} = \widehat{LUE} = \widehat{SUR} = \widehat{SFR}$$
$$\widehat{EFR} = \widehat{EUF} = 55^\circ; \widehat{LFS} = 115^\circ;$$
$$\widehat{UFR} = 20^\circ; \widehat{RUF} = 70^\circ$$

1. Quelle est la nature du triangle LFU ?
2. Montre que les points F, L, E, U, R et S sont sur un même cercle dont on précisera le diamètre.
3. Construis cette figure avec $FU = 9\,cm$.

Chapitre 5

Nombres relatifs en écriture fractionnaire

Sommaire

Programme 2004

Opérations $(+, -, \times, \div)$ sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée).	Savoir que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.	Un travail sera conduit sur la notion d'inverse d'un nombre non nul, les notations x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ et l'usage de calculatrices avec la touche correspondante. À cette occasion, on remarquera que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.
	Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs). Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ où a, b, c et d sont des nombres décimaux relatifs.	
	Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire.	L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire peut demander un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers. La recherche du plus petit commun multiple pour l'obtention d'un dénominateur commun et celle du plus grand diviseur commun pour l'obtention de la forme irréductible ne sont pas exigibles.

I. Quotients égaux de deux nombres relatifs

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsque l'on multiplie (ou on divise) ces deux nombres par un même nombre relatif non nul (différent de 0).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \quad (b \neq 0; c \neq 0)$$

Exemples

$\dfrac{0,3}{-20} = \dfrac{0,3 \times 10}{-20 \times 10} = \dfrac{3}{-200} = -\dfrac{3}{200}$ $\dfrac{-18}{12} = \dfrac{(-3) \times 6}{2 \times 6} = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$ (Simplification) $\dfrac{0,4}{0,82} = \dfrac{40}{82} = \dfrac{20}{21}$

Exercices :
10, 12 et 13 page 30 ; 55, 56 et 44 page 34 ; 61 page 35.

II. Addition et soustraction de deux fractions

1) Les dénominateurs sont identiques

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k} \qquad \frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k} \qquad (k \neq 0)$$

Exemples :

$\dfrac{-7}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{-7+2}{3} = \dfrac{-5}{3} = -\dfrac{5}{3}$ $\qquad \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1-3}{5} = \dfrac{-2}{5} = -\dfrac{2}{5}$

2) Les dénominateurs sont différent

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur et on applique la règle précédente.

Exemples :

$\dfrac{-1}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{-2}{6} + \dfrac{15}{6} = \dfrac{-2+15}{6} = \dfrac{13}{6}$ On cherche un multiple de 3 et de 2.

$\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{6} = \dfrac{15}{12} - \dfrac{14}{12} = \dfrac{15-14}{12} = \dfrac{1}{12}$ On cherche un multiple de 4 et 6.

Exercices :
14, 15, 16 et 17 page 31 ; 59 et 62 page 35.

III. Multiplication de deux fractions

Activité : 1.feuille 1

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0;\ d \neq 0)$$

Exemples $\quad \frac{3}{5} \times \frac{-2}{7} = \frac{3 \times (-2)}{5 \times 7} = \frac{-6}{35} \qquad 4 \times \frac{9}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{9}{5} = \frac{4 \times 9}{1 \times 5} = \frac{36}{5}$.

Rappel : Fraction de grandeurs
Prendre une fraction d'une fraction revient à multiplier les deux fractions.

Exemple :
Déterminer la valeur des trois quarts des deux tiers de 10 €.
$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 10 = 5$. Les trois quarts des deux tiers de 10 € font 5 €.

Exercices :
18 page 31 ; 46 et 48 page 34 ; 66 et 67 page 35.

IV. Division de deux fractions

Activité : 2.feuille 1

Diviser par un nombre relatif différent de 0, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

Exemple $\frac{-2}{0,25} = -2 \times \frac{1}{0,25} = -2 \times 4 = -8$.

Activité : feuille 2
Déinition :
L'inverse de la fraction $\frac{c}{d}$ est la fraction $\frac{d}{c}$ (avec $c \neq 0;\ d \neq 0$).

Diviser par une fraction $\frac{c}{d}$ ($c \neq 0;\ d \neq 0$), c'est multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples

$\frac{3}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28} \qquad \frac{4}{3} \div 9 = \frac{4}{3} \div \frac{9}{1} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{27} \qquad \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

Exercices :
19, 20, 21, 22 et 24 page 31 ; 25, 26, 27, 32, 34, 35 page 32 ; 43 page 33 ; 73, 75 page 36 ; 93 page 37 ; 101 page 38.

4^{e}

I Quotient égaux de deux nombres relatifs

☐ ☐ 10 p 30
☐ ☐ 12 p 30
☐ ☐ 13 p 30
☐ ☐ 55 p 34
☐ ☐ 56 p 34
☐ ☐ 44 p 34
☐ ☐ 61 p 35
☐ ☐ 14 p 31

II Addition et soustraction de deux fractions

☐ ☐ 15 p 31
☐ ☐ 16 p 31
☐ ☐ 17 p 31
☐ ☐ 59 p 35
☐ ☐ 62 p 35

III Multiplication de deux fractions

☐ ☐ 18 p 31
☐ ☐ 46 p 34
☐ ☐ 48 p 34
☐ ☐ 66 p 35
☐ ☐ 67 p 35

IV Division de deux fractions

☐ ☐ 20 p 31
☐ ☐ 21 p 31
☐ ☐ 22 p 31
☐ ☐ 24 p 31
☐ ☐ 25 p 32
☐ ☐ 26 p 32
☐ ☐ 27 p 32
☐ ☐ 32 p 32
☐ ☐ 34 p 32
☐ ☐ 35 p 32
☐ ☐ 43 p 33
☐ ☐ 73 p 36
☐ ☐ 75 p 36
☐ ☐ 93 p 37
☐ ☐ 101 p 38

4^{e}

I Quotient égaux de deux nombres relatifs

☐ ☐ 10 p 30
☐ ☐ 12 p 30
☐ ☐ 13 p 30
☐ ☐ 55 p 34
☐ ☐ 56 p 34
☐ ☐ 44 p 34
☐ ☐ 61 p 35
☐ ☐ 14 p 31

II Addition et soustraction de deux fractions

☐ ☐ 15 p 31
☐ ☐ 16 p 31
☐ ☐ 17 p 31
☐ ☐ 59 p 35
☐ ☐ 62 p 35

III Multiplication de deux fractions

☐ ☐ 18 p 31
☐ ☐ 46 p 34
☐ ☐ 48 p 34
☐ ☐ 66 p 35
☐ ☐ 67 p 35

IV Division de deux fractions

☐ ☐ 20 p 31
☐ ☐ 21 p 31
☐ ☐ 22 p 31
☐ ☐ 24 p 31
☐ ☐ 25 p 32
☐ ☐ 26 p 32
☐ ☐ 27 p 32
☐ ☐ 32 p 32
☐ ☐ 34 p 32
☐ ☐ 35 p 32
☐ ☐ 43 p 33
☐ ☐ 73 p 36
☐ ☐ 75 p 36
☐ ☐ 93 p 37
☐ ☐ 101 p 38

4^{e}

I Quotient égaux de deux nombres relatifs

☐ ☐ 10 p 30
☐ ☐ 12 p 30
☐ ☐ 13 p 30
☐ ☐ 55 p 34
☐ ☐ 56 p 34
☐ ☐ 44 p 34
☐ ☐ 61 p 35
☐ ☐ 14 p 31

II Addition et soustraction de deux fractions

☐ ☐ 15 p 31
☐ ☐ 16 p 31
☐ ☐ 17 p 31
☐ ☐ 59 p 35
☐ ☐ 62 p 35

III Multiplication de deux fractions

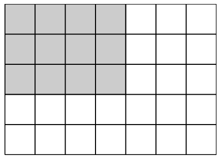
☐ ☐ 18 p 31
☐ ☐ 46 p 34
☐ ☐ 48 p 34
☐ ☐ 66 p 35
☐ ☐ 67 p 35

IV Division de deux fractions

☐ ☐ 20 p 31
☐ ☐ 21 p 31
☐ ☐ 22 p 31
☐ ☐ 24 p 31
☐ ☐ 25 p 32
☐ ☐ 26 p 32
☐ ☐ 27 p 32
☐ ☐ 32 p 32
☐ ☐ 34 p 32
☐ ☐ 35 p 32
☐ ☐ 43 p 33
☐ ☐ 73 p 36
☐ ☐ 75 p 36
☐ ☐ 93 p 37
☐ ☐ 101 p 38

Activité 1 : Produit de deux fractions

On appelle A l'aire du rectangle grisé, L sa longueur et l sa largeur. De même, on appelle A' l'aire du grand rectangle, L' sa longueur et l' sa largeur.



1. Quelle fraction de l'aire du grand rectangle représente l'aire du rectangle grisé ? Exprimer A en fonction de A'.
2. Quelle fraction de la longueur du grand rectangle représente la longueur du rectangle grisé ? Exprimer L en fonction de L'.
3. Quelle fraction de la largeur du grand rectangle représente la largeur du rectangle grisé ? Exprimer l en fonction de l'.
4. Compléter :

$$\begin{aligned} A &= L \times l \\ &= \ldots\ldots L' \times \ldots\ldots l' \\ &= \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times L' \times l' \\ &= \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots \times A' \end{aligned}$$

5. Avec les questions 1. et 4., on peut écrire $A = \ldots\ldots \times A' = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times A'$.
   On en déduit que $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$.

   Conclusion : Pour calculer le .... de deux fractions, on calcule le produit des .... ainsi que celui des ....

Activité 2 : Division et inverse

1. Rappelle la définition de l'inverse d'un nombre relatif non nul. (On pourra donner des exemples.)
2. Recopie et complète les égalités suivantes :

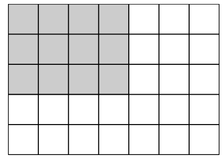
$$5 \times \frac{1}{3} = \ldots \qquad -7 \times \frac{\ldots}{4} = \frac{-7}{4} \qquad 8 \times \frac{1}{\ldots} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{\ldots} \qquad \frac{12}{-7} = \ldots \times \frac{1}{-7} \qquad \frac{-14}{19} = -14 \times \frac{\ldots}{19}$$

3. La deuxième ligne est composée de quotients égaux à des produits. Traduis ces égalités mathématiques par des phrases de la forme *Le quotient de ... par ... est égal...* puis par des phrases de la forme *si je divise ... par ... alors cela revient à ...*
4. Si je souhaite diviser un nombre relatif a par un nombre relatif non nul b, que dois-je faire ?

Activité 1 : Produit de deux fractions

On appelle A l'aire du rectangle grisé, L sa longueur et l sa largeur. De même, on appelle A' l'aire du grand rectangle, L' sa longueur et l' sa largeur.



1. Quelle fraction de l'aire du grand rectangle représente l'aire du rectangle grisé ? Exprimer A en fonction de A'.
2. Quelle fraction de la longueur du grand rectangle représente la longueur du rectangle grisé ? Exprimer L en fonction de L'.
3. Quelle fraction de la largeur du grand rectangle représente la largeur du rectangle grisé ? Exprimer l en fonction de l'.
4. Compléter :

$$\begin{aligned} A &= L \times l \\ &= \ldots\ldots L' \times \ldots\ldots l' \\ &= \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times L' \times l' \\ &= \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots \times A' \end{aligned}$$

5. Avec les questions 1. et 4., on peut écrire $A = \ldots\ldots \times A' = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times A'$.
   On en déduit que $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$.

   Conclusion : Pour calculer le .... de deux fractions, on calcule le produit des .... ainsi que celui des ....

Activité 2 : Division et inverse

1. Rappelle la définition de l'inverse d'un nombre relatif non nul. (On pourra donner des exemples.)
2. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$5 \times \frac{1}{3} = \ldots \qquad -7 \times \frac{\ldots}{4} = \frac{-7}{4} \qquad 8 \times \frac{1}{\ldots} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{\ldots} \qquad \frac{12}{-7} = \ldots \times \frac{1}{-7} \qquad \frac{-14}{19} = -14 \times \frac{\ldots}{19}$$

3. La deuxième ligne est composée de quotients égaux à des produits. Traduis ces égalités mathématiques par des phrases de la forme *Le quotient de ... par ... est égal...* puis par des phrases de la forme *si je divise ... par ... alors cela revient à ...*
4. Si je souhaite diviser un nombre relatif a par un nombre relatif non nul b, que dois-je faire ?

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Activité 3 : Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie
$$\frac{2}{3}\times ? = 1$$
Recopie et complète les égalités ci-dessous :
$$\frac{2}{3}\times \ldots = \underbrace{\frac{2\times\ldots}{3\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$
Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....
2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Additionner, soustraire deux fractions

1. Même dénominateur

   On additionne ou soustrait les numérateurs, sans toucher aux dénominateurs.

2. Dénominateurs multiples

   Si le plus grand dénominateur est un multiple du plus petit, alors on multiplie la fraction de plus petit dénominateur au numérateur et au dénominateur par le quotient du plus grand dénominateur par le plus petit dénominateur.
   Exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}+\frac{7}{12} &= \frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{7}{12} \\ &= \frac{4}{12}+\frac{7}{12} \qquad (12 \div 3 = 4) \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

3. Dénominateurs non multiples

   On décompose les dénominateurs en produit de facteurs les plus petit possible :
   Exemple :

$$\frac{1}{35}+\frac{1}{42}=\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{6\times 7}$$

$$\frac{3}{65}-\frac{2}{75}=$$

   Le but étant de trouver des facteurs communs.

   (a) Un ou plusieurs facteurs communs (différents de 1)
   Exemple :

$$\frac{3}{35}+\frac{1}{42}=\frac{3}{5\times 7}+\frac{1}{6\times 7}$$

   On entoure les facteurs communs, on multiplie la première fraction au numérateur et au dénominateur par **ce qui n'est pas entouré** au dénominateur de la deuxième fraction, et inversement.

$$\begin{aligned} \frac{3}{35}+\frac{1}{42} &= \frac{3}{5\times 7}+\frac{1}{6\times 7} \\ &= \frac{3\times 6}{5\times 7\times 6}+\frac{1\times 5}{6\times 7\times 5} \\ &= \frac{18}{210}+\frac{5}{210} \\ &= \frac{23}{210} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{72}-\frac{2}{35}=$$

   (b) Aucun facteur commun (autre que 1)
   Exemple :

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{11}=\frac{1}{5\times 1}+\frac{2}{11\times 1}$$

   On multiplie la première fraction au numérateur et au dénominateur par le dénominateur de la deuxième et inversement.
   Exemple :

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{11}=\frac{1}{5\times 1}+\frac{2}{11\times 1}=\frac{1\times 11}{5\times 11}+\frac{2\times 5}{11\times 5}=\frac{11}{55}+\frac{10}{55}=\frac{21}{55}$$

$\star$

Exercice 1

On donne

$$a = \frac{2}{3} \qquad b = -3 \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{3}{4}$$

Exprimer sous forme fractionnaire : $a + b + c$, $a + b - c$, $-a - b + c$, $a + bc$, abc.

Exercice 2

Les $\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe ont participé à une excursion ; les $\frac{2}{3}$ des élèves partis sont des filles.

1. Quelle fraction de la classe représentent les filles qui sont parties en excursion ?
2. Il y a 30 élèves dans la classe. Combien de filles ont participé à l'excursion ?

Exercice 3

Martine, Pascale et Agnès veulent acheter ensemble une chaîne HI-FI de 1 995€. Martine peut payer $\frac{1}{3}$ du prix, Pascale $\frac{2}{5}$ et Agnès $\frac{2}{7}$. Est-ce suffisant ?

Exercice 4

Après lavage, un drap a rétréci et perdu $\frac{2}{27}$ de sa longueur.

1. Quelle fraction de sa longueur de départ reste-t-il ?
2. Désormais, le drap mesure $2,25\,m$ de long. Calcule sa longueur de départ.

$\star\star$

Exercice 5

Quatre enfants découpent un pain d'épice pour leur goûter : Alice en prend le tiers, Benoït les $\frac{3}{5}$ de ce qu'a laissé Alice puis Cécile et Lucas, les jumeaux, se partagent le reste de manière égale.

1. Choisis parmi les trois calculs suivants celui qui permet d'obtenir la fraction de pain d'épice reçue par chacun des jumeaux. Explique ton choix.

$$X = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) \div 2 \quad Y = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times 2 \quad Z = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}$$

2. Effectue le calcul choisi.

Exercice 6

La société Livrevite doit distribuer 183 colis pour Noël. Elle décide de confier ce travail à ses deux meilleurs livreurs : Eole et Zéphir. Ceux-ci se partagent les colis.

A la fin de la première journée, Eole a livre les $\frac{2}{5}$ de ses colis, c'est-à-dire 36 colis.

1. Combien Eole doit-il encore livrer de colis les jours suivants ?
2. Combien de colis Zéphir doit-il distribuer ?
3. Sachant que Zéphir a distribué les $\frac{2}{3}$ de ses colis le premier jour, combien doit-il en livrer les jours suivants ?
4. Quelle fraction du nombre total de colis représentent tous les colis distribués par les 2 livreurs le premier jour ?

Exercice 7

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \qquad B = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 8

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \qquad B = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \times \frac{2}{3}$$

Exercice 9

Pour son rayon de café de luxe, monsieur Robusta achète 168 kilogrammes de café vert. Après transformation, monsieur Robusta constate avec horreur que ce café perd $\frac{6}{35}$ de sa masse.

1. Vérifie que la masse perdue pendant la transformation est égale à $28,8\,kg$.
2. Monsieur Robusta vend ce café transformé 9,30€ le kilogramme. Quelle somme d'argent Monsieur Robusta récupère-t-il si tout son café transformé est vendu ?
3. Le prix d'achat des 168 kilogrammes de café vert représente 55% de la somme obtenue par la vente. Combien ont coûté les 168 kilogramme de café vert à Monsieur Robusta ?

Exercice 10

4 personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1^{re} personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\frac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Quelle est la fraction du trésor que représente la part de la 4^{e}personne ?
2. Déduis-en que le trésor contenait 540 pièces d'or.
3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

Exercice 11

On donne les nombres

$$A = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$$

Calcule les expressions A et B. On écrira les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible.

Exercice 12

Une balle rebondit aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur où elle a été lâchée.

1. A quelle fraction de la hauteur de chute s'élève-elle au 2^{e} rebond ? au 3^{e} ?
2. Si la balle a été lâchée à une hauteur de $1,62\,m$; à quelle hauteur rebondit-elle après le 4^{e} rebond ?

Exercice 13

Sébastien a dépensé les $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour l'achat d'un CD et les $\frac{2}{3}$ de ce qui lui reste pour l'achat de bandes dessinées.

1. Quelle fraction de la somme de départ représente la somme qu'il reste après ses achats ?
2. Si lui reste 20€, combien avait-il au départ ?
3. Quel est le prix du CD ? Et celui des BD ?

Exercice 14

Lors d'un héritage, une certaine somme d'argent est partagée entre 3 personnes : Arnaud, Béatrice et Claude. Arnaud reçoit les $\frac{8}{15}$ de la somme, Béatrice reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part d'Arnaud.
Quelle fraction de la somme totale Claude reçoit-il ?

Exercice 15

1/ Calcule A et écris la réponse sous forme d'une fraction irréductible. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$A = \frac{5}{12} - \frac{5}{3} \div \frac{7}{9}$$

2/ Calcule B et écris la réponse sous la forme d'un entier relatif. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 16

Effectue les calculs suivants et écris le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{7}{4} \div \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 17

Un viticulteur stocke sa production dans 3 cuves de même contenance. La première est pleine aux $\frac{2}{7}$, la seconde aux $\frac{3}{8}$ et la troisième est vide aux $\frac{9}{14}$. Une seule cuve aurait-elle été suffisante pour stocker la récolte complète ?

⋆⋆⋆

Exercice 18

Lors d'un héritage, 3 enfants souhaitent se partager un terrain et construire chacun une maison sur leur partie.

1. Le 1er enfant souhaite obtenir le tiers du terrain, le 2e enfant le cinquième et le 3e la moitié du terrain. Est-ce possible ? Pourquoi ?
2. Après discussion, les deux premiers enfants obtiennent ce qu'ils demandent et le 3e prend ce qui reste, soit $2100\,m^2$.
   (a) Quelle fraction du terrain reste-t-il pour le 3e enfant ?
   Déduis-en la superficie totale du terrain.
   (b) Calcule la superficie des parties des deux autres enfants.

Exercice 19

Ce mois-ci, Emilie a dépensé un quart de son argent de poche pour des livres, un tiers pour le cinéma et un autre tiers pour des dépenses diverses.
A-t-elle dépensé tout son argent ? Si non, calcule la fraction de son argent de poche qu'il lui reste.

Exercice 20

Le jus obtenu en pressant des cerises représente les $\frac{3}{4}$ de la masse de celles-ci.
On ajoute à ce jus une masse égale de sucre et l'on fait bouillir pour obtenir de la gelée. Le mélange jus et sucre donne les $\frac{4}{5}$ de sa masse en gelée. Un kilogramme de sucre à confiture coûte 1,08€ et un kilogramme de cerises coûte 2,81€.

1. Avec $1\,kg$ de cerises, quelle masse de gelée obtient-on ?
2. Quel est le prix d'un kilogramme de gelée de cerises ?

Exercice 21

Calcule et donne le résultat le plus simple possible de

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \qquad B = \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \div \frac{28}{5} \qquad C = \left(\frac{11}{3} + \frac{11}{7}\right) \div \left(\frac{11}{6} + \frac{11}{4}\right)$$

Exercice 22

Trois personnes se partagent un terrain rectangulaire. La première achète les deux septièmes du terrain, la seconde les deux tiers du reste ; la troisième personne achète la dernière partie du terrain.

1. Exprime la part de chaque personne comme fraction de l'aire totale.
2. Quelle personne possède le plus de terrain ?
3. Le terrain mesure $630\,m$ sur $490\,m$. Calcule l'aire de chaque part.
4. Représente le partage sur un dessin à l'échelle $1/10\,000$.

Exercice 23

Calcule les expressions suivantes. On fera apparaître toutes les étapes de calcul.

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \qquad D = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{15}$$

$$E = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \div \frac{4}{3} \qquad F = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 24

1. Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$.
   Calcule A en détaillant les étapes de calculs.
2. Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2001 et les quatre-cinquièmes du reste en 2002.
   (a) Quelle fraction de la propriété a été vendue en 2002 ?
   (b) Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?
   (c) Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

Récapitulatif

Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire.

Addition de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}$$
$$A = \frac{1+7}{3}$$
$$A = \frac{8}{3}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on additionne ensuite.

$$B = \frac{2}{5} + \frac{4}{7}$$
$$B = \frac{14}{35} + \frac{20}{35}$$
$$B = \frac{14+20}{35}$$
$$B = \frac{34}{35}$$

Soustraction de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{7}{4} - \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7-9}{4}$$
$$A = \frac{-2}{4}$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on soustrait ensuite.

$$B = \frac{5}{6} - \frac{7}{4}$$
$$B = \frac{10}{12} - \frac{21}{12}$$
$$B = \frac{10-21}{12}$$
$$B = \frac{-11}{35}$$

Multiplication de 2 fractions.

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$A = \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7 \times 9}{5 \times 4}$$
$$A = \frac{63}{20}$$

Division de 2 fractions.

Lorsque l'on divise par une fraction, cela revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$A = \frac{7}{5} \div \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7}{5} \times \frac{4}{9}$$
$$A = \frac{7 \times 4}{5 \times 9}$$
$$A = \frac{28}{45}$$

Révisions sur les fractions

Exercice 1 :

Donne, si possible, une écriture décimale de $\frac{11}{4}$, de $\frac{7}{3}$, de $\frac{1}{4}$.

Exercice 2 :

Simplifie les fractions suivantes :

$\frac{12}{18}$ $\frac{21}{49}$ $\frac{15}{25}$ $\frac{26}{13}$ $\frac{49}{56}$ $\frac{40}{180}$ $\frac{25}{65}$ $\frac{42}{12}$

Exercice 3 :

Range les nombres suivants dans l'ordre croissant :

1. $\frac{13}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{24}{7}$ $\frac{1}{7}$
2. $\frac{12}{5}$ $\frac{12}{9}$ $\frac{12}{23}$ $\frac{12}{7}$ $\frac{12}{17}$
3. $\frac{3}{4}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{11}{4}$ $\frac{27}{12}$ $\frac{5}{4}$

Exercice 4 :

Compare, en justifiant, les fractions :

$\frac{10}{8}$ et $\frac{11}{3}$; $\frac{11}{12}$ et $\frac{11}{18}$

$\frac{18}{12}$ et $\frac{12}{13}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{10}{12}$

Exercice 5 :

Quelles notes préfères-tu avoir à un contrôle ?

$\frac{17}{20}$ ou $\frac{8}{10}$; $\frac{6}{10}$ ou $\frac{11}{20}$; $\frac{12,5}{20}$ ou $\frac{6,5}{10}$; $\frac{13,5}{20}$ ou $\frac{7}{10}$

Exercice 6 :

L'aire d'un rectangle est $10,22$ cm^2. Sa largeur est de $2,8$ cm. Calcule le périmètre de ce rectangle.

Exercice 7 :

Pour mijoter une fondue savoyarde pour 4 personnes, Jim prévoit 900 g de fromage. Un quart est du comté, les deux tiers sont de la mimolette et le reste est du reblochon.
1. Calcule les masses du comté et de la mimolette utilisées.
2. Quelles masses de comté et de mimolette faudra-t-il pour 6 personnes ?

Exercice 8 :

Effectue et simplifie le résultat si possible.

$A = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}$ $B = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}$ $C = \frac{11}{15} + \frac{34}{15}$ $D = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$

$E = \frac{43}{8} - \frac{5}{8}$ $F = \frac{21}{13} + \frac{15}{13}$ $G = \frac{27}{20} + \frac{11}{20} + \frac{7}{20}$ $H = \frac{27}{57} - \frac{10}{57} + \frac{2}{57}$

$I = \frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$ $J = \frac{5}{9} \times \frac{7}{5}$ $K = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$ $L = 5 \times \frac{3}{2}$ $M = \frac{5}{7} \times \frac{2}{7}$ $N = \frac{4}{21} \times \frac{7}{8}$

Exercice 9 :

Calcule l'Expression $E = a - (b - c) - (d - c)$ sachant que $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{6}$ et $d = \frac{3}{2}$.

Exercice 10 :

Calcule le plus simplement possible :

$P = \frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{6}{5} + \frac{5}{7}$ $Q = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} + \frac{5}{3}$ $R = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{12}$ $S = \frac{11}{2} + \frac{19}{8} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} - 7$

Exercice 11 :

Calcule :

$3 + \frac{7}{4}$ $2 - \frac{2}{7}$ $5 + \frac{11}{5}$ $3 + \frac{4}{7}$ $12 - \frac{7}{2}$

$5 + \frac{5}{11}$ $3 - \frac{2}{7}$ $\frac{15}{12} - \frac{3}{8}$ $2 + \frac{7}{3}$ $\frac{25}{100} + \frac{3}{8}$

Chapitre 6

Théorème des milieux

Sommaire

Programme 2004

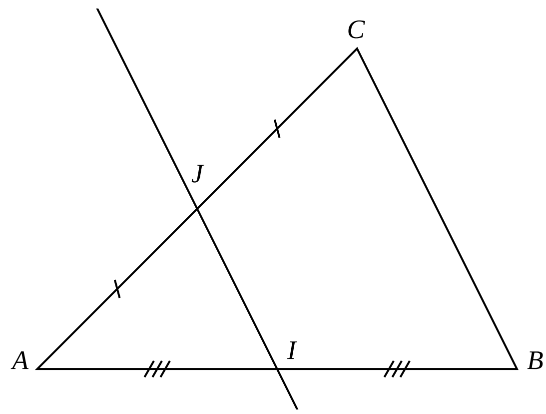
Milieux et parallèles.	Connaître et utiliser les théorèmes suivants relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle : Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième. Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu. Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.	La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes.

I. Le théorème des milieux

Activité :
1. Conjecture avec Geogebra :
a. Faire remarquer que BC et IJ ne varient pas quand A bouge.
b. Faire calculer le rapport $\dfrac{IJ}{BC}$ dans plusieurs cas.
2. feuille.

> Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au 3ᵉcôté.
> Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du 3ᵉ côté.

Exemple 1 :



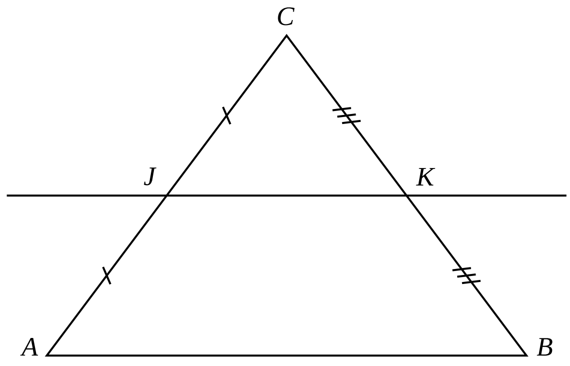
ABC est un triangle, (AI) et (BJ) sont 2 médianes de ce triangle, montrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
Données :
I est le milieu du segment $[AB]$ et J est le milieu du segment $[AC]$.
Propriété :
Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au 3ᵉcôté.
Conclusion :
Donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Exemple 2 :
ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 3\,cm$, $AC = 4\,cm$. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$. Calculer IJ.
Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore,
on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$BC = \sqrt{25} = 5\,cm$.
Données :
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AC]$.
Propriété :
Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du 3ᵉ côté.
Conclusion :
$IJ = \dfrac{1}{2}BC = 2,5\,cm$.
Exercices : 2 page 180 ; 14 page 181 (indication : MQ $(IJ)//(BC)$ puis $(IJ)//(RS)$).

II. Milieu et parallèle

> Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Exemple :



ABC est un triangle, J est le milieu de $[AC]$, K est le point de $[BC]$ tel que les droites (AB) et (JK) soient parallèles. Montrer que K est le milieu de $[BC]$.

Données :

Dans le triangle ABC, (JK) est parallèle à la droite (AB), J est le milieu de $[AC]$.

Propriété :

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Conclusion :

Donc le point K est le milieu du segment $[BC]$.

Exercices : 4 et 6 page 180 ; 22 page 182 ; 18 et 15 page 181 ; 31 page 183.

4^{e}

I Théorème des milieux

☐ ☐ activité 1 p 173
☐ ☐ 2 p 180
☐ ☐ 14 p 181
(indication : montrer que $(IJ)//(BC)$ puis que $(IJ)//(RS)$)

II Milieu et parallèle

☐ ☐ activité 2 p 173
☐ ☐ 4 p 180
☐ ☐ 6 p 180
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 18 p 181
☐ ☐ 15 p 181
☐ ☐ 31 p 183

4^{e}

I Théorème des milieux

☐ ☐ activité 1 p 173
☐ ☐ 2 p 180
☐ ☐ 14 p 181
(indication : montrer que $(IJ)//(BC)$ puis que $(IJ)//(RS)$)

II Milieu et parallèle

☐ ☐ activité 2 p 173
☐ ☐ 4 p 180
☐ ☐ 6 p 180
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 18 p 181
☐ ☐ 15 p 181
☐ ☐ 31 p 183

4^{e}

I Théorème des milieux

☐ ☐ activité 1 p 173
☐ ☐ 2 p 180
☐ ☐ 14 p 181
(indication : montrer que $(IJ)//(BC)$ puis que $(IJ)//(RS)$)

II Milieu et parallèle

☐ ☐ activité 2 p 173
☐ ☐ 4 p 180
☐ ☐ 6 p 180
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 18 p 181
☐ ☐ 15 p 181
☐ ☐ 31 p 183

Démonstration du théorème des milieux

1. On va montrer que la droite joignant deux milieux de côtés dans un triangle est parallèle au troisième côté.
   On considère un triangle ABC quelconque, on appelle I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$.
   Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe le segment $[BC]$ en H.
   (a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHB ? Justifier.
   (b) Que peut-on dire de IA et IH ? Que peut-on en déduire pour le point I par rapport au segment $[AH]$?
   (c) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC ? Justifier.
   (d) Que peut-on dire de JA et JH ? Que peut-on en déduire pour le point J par rapport au segment $[AH]$?
   (e) Que représente la droite (IJ) pour le segment $[AH]$? Justifier.
   (f) Que peut-on en conclure pour les droites (IJ) et (BC) ? Justifier.
2. On va montrer que la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est la moitié de la longueur du dernier côté.
   On considère un triangle DEF quelconque, on appelle K le milieu du segment $[DE]$, L le milieu du segment $[EF]$ et M le milieu du segment $[DF]$.
   (a) Montrer que la droite (KL) est parallèle à la droite (DF), en déduire que la droite (KL) est parallèle à la droite (DM).
   (b) Montrer que la droite (LM) est parallèle à la droite (DE), en déduire que la droite (LM) est parallèle à la droite (DK).
   (c) Que peut-on dire du quadrilatère $DMLK$? Justifier.
   (d) Que peut-on dire des longueurs KL et DM ? Justifier.
   (e) Justifier que $KL = \dfrac{1}{2}DF$

Démonstration du théorème des milieux

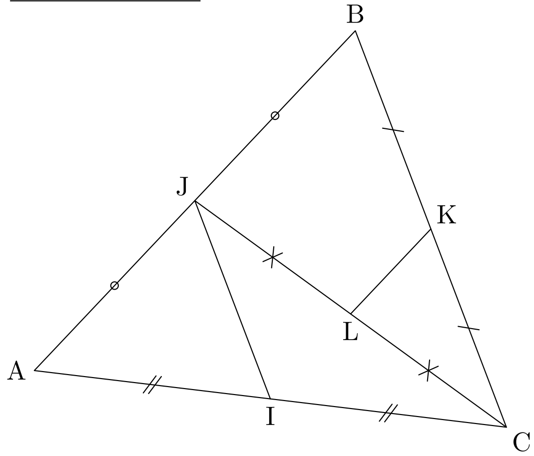
1. On va montrer que la droite joignant deux milieux de côtés dans un triangle est parallèle au troisième côté.
   On considère un triangle ABC quelconque, on appelle I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$.
   Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe le segment $[BC]$ en H.
   (a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHB ? Justifier.
   (b) Que peut-on dire de IA et IH ? Que peut-on en déduire pour le point I par rapport au segment $[AH]$?
   (c) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC ? Justifier.
   (d) Que peut-on dire de JA et JH ? Que peut-on en déduire pour le point J par rapport au segment $[AH]$?
   (e) Que représente la droite (IJ) pour le segment $[AH]$? Justifier.
   (f) Que peut-on en conclure pour les droites (IJ) et (BC) ? Justifier.
2. On va montrer que la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est la moitié de la longueur du dernier côté.
   On considère un triangle DEF quelconque, on appelle K le milieu du segment $[DE]$, L le milieu du segment $[EF]$ et M le milieu du segment $[DF]$.
   (a) Montrer que la droite (KL) est parallèle à la droite (DF), en déduire que la droite (KL) est parallèle à la droite (DM).
   (b) Montrer que la droite (LM) est parallèle à la droite (DE), en déduire que la droite (LM) est parallèle à la droite (DK).
   (c) Que peut-on dire du quadrilatère $DMLK$? Justifier.
   (d) Que peut-on dire des longueurs KL et DM ? Justifier.
   (e) Justifier que $KL = \dfrac{1}{2}DF$

★

Exercice 1

1. Trace un triangle EFG tel que $FG = 7cm$; $FE = 5cm$; $GE = 6cm$.
2. Place le point A symétrique de E par rapport à F. Place le point S symétrique de E par rapport à G.
3. Que peut-on dire des droites (FG) et (AS) ? Justifie.
4. Quelle est la longueur du segment $[AS]$? Justifie.

Exercice 2



Sur la figure ci-contre, on a $AB = 8\,cm$ et $BC = 6\,cm$.

1. Démontre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et calcule la longueur IJ.
2. Démontre que les droites (LK) et (AB) sont parallèles et calcule la longueur LK.

Exercice 3

1. Construis un triangle EFG tel que $EF = 7\,cm$, $\widehat{EFG} = 65^\circ$, $\widehat{FEG} = 45^\circ$.
   Soit K le milieu du segment $[EF]$. La parallèle à la droite (EG) passant par K coupe le segment $[FG]$ en L.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{FGE}$.
3. Prouve que L est le milieu du segment $[FG]$.

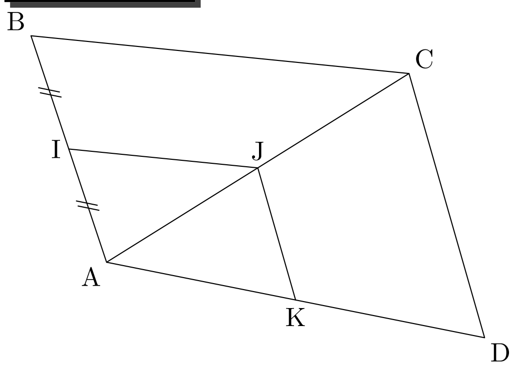
★★

Exercice 4

Trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un diamètre $[IJ]$ de ce cercle. Place un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ et le milieu K du segment $[JM]$.

1. Montre que les droites (OK) et (IM) sont parallèles.
2. Montre que les points O et K sont des points de la médiatrice du segment $[JM]$.
3. Montre que le triangle JMI est rectangle en M.

Exercice 5



Dans la figure ci-contre, I est le milieu du segment $[AB]$, la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) et la droite (JK) est parallèle à la droite (CD).

1. Que peut-on dire du point J ? Justifie.
2. Que peut-on dire du point K ? Justifie.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (IK) et (BD) ? Justifie.

Exercice 6

Soit ABC un triangle et M un point quelconque du segment $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AC) en N. K est le symétrique du point M par rapport au point B. On appelle L le point d'intersection des droites (BC) et (KN).

1. Fais une figure.
2. Prouve que L est le milieu du segment $[KN]$.

Exercice 7

On considère un triangle ABC tel que $CB = 6\,cm$, $BA = 4\,cm$ et $\widehat{CBA} = 120^{\circ}$.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

1. Fais une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Place le point D sur le segment $[BC]$ tel que $BD = 1\,cm$.
3. Place le point E sur la droite (BC), en dehors du segment $[BC]$, tel que $BE = 4\,cm$.
4. Prouve que la droite (IJ) coupe les segments $[AD]$ et $[AE]$ en leur milieu.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 8

Soit un triangle OBE.
Soit A le symétrique de B par rapport à O. Soit C le symétrique de E par rapport à O.
Soit D le symétrique de O par rapport à B. Soit F le symétrique de O par rapport à E.

1. Fais une figure.
2. Prouve que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.
3. Que peut-on dire des droites (BE) et (DF) ? Justifie.
4. Conclue que les droites (AC) et (DF) sont parallèles et que

$$AC = \frac{1}{2}DF$$

Exercice 9

On considère un cercle de diamètre $[AB]$. Soit C un point de ce cercle et D le symétrique de A par rapport à C. La parallèle à la droite (BC) passant par le point D coupe la droite (AB) en E.

1. Réalise une figure.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Démontre que B est le milieu du segment $[AE]$.
4. Quelle est le centre du cercle circonscrit au triangle ADE ?
5. Exprime l'aire $\mathcal{A}'$ du disque de diamètre $[AE]$ en fonction de l'aire $\mathcal{A}$ du disque de diamètre $[AB]$.

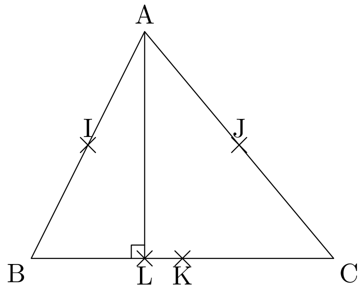
Exercice 10

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Fais plusieurs figures en modifiant le quadrilatère $ABCD$. Quelle conjecture[1] peut-on faire ?
2. Démontre cette conjecture[2].
3. Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il pour obtenir un rectangle $IJKL$?

[1] Supposition mathématique (il semble que...) que l'on pense pouvoir démontrer.
[2] Ce théorème est connu sous le nom de **Théorème de Varignon**

Exercice 11



On considère la figure ci-contre dans laquelle I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC. L est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Reproduis la figure ci-contre avec $BC = 6\,cm$, $AB = 5\,cm$ et $AC = 4\,cm$. On la complétera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontre que $LI = IB = IA$.
3. Démontre que $KJ = \dfrac{AB}{2}$.
4. La parallèle à la droite (BC) passant par A coupe la parallèle à la droite (JK) passant par C en F. Quelle est la nature du quadrilatère $AFCB$?

Chapitre 7

L'égalité des 3 rapports

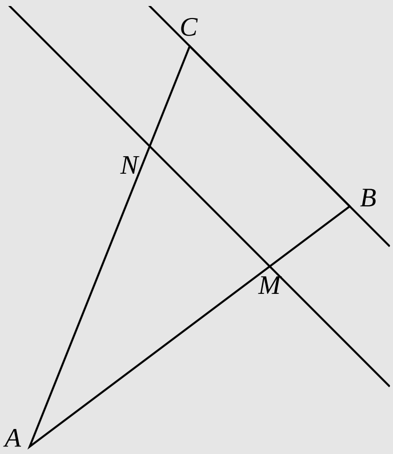
Sommaire

Programme 2004

Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.	Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, N un point du côté $[AC]$ et si $[MN]$ est parallèle à $[BC]$, alors $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$	L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. Elle s'étend bien sûr au cas où M et N appartiennent respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, mais on n'examinera pas le cas où les demi-droites $[AM)$ et $[AB)$, de même que les demi-droites $[AN)$ et $[AC)$, sont opposées. Le théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque seront étudiés en classe de 3^{e}.

I. L'égalité des trois rapports

Propriété

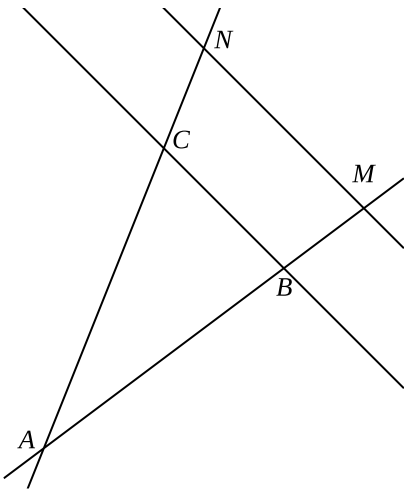


Dans un triangle ABC, si M, A et B sont alignés ; N A et C sont alignés et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{\text{côtés du triangle } AMN}{\text{côtés correspondants du triangle } ABC}$$

Remarques :
On dit aussi, dans cette configuration, que les longueurs des côtés du triangle AMN sont *proportionnels* aux côtés correspondants du triangle ABC.

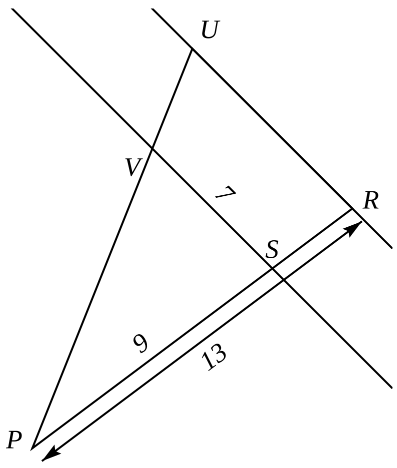


Dans le cas où M et N appartiennent aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ avec la droite (MN) parallèle à la droite (BC), on a encore

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exercices : 7 et 8 page 180 ; 10 page 181.

II. Application : calcul de longueurs



L'unité est le centimètre. Les droites (SV) et (RU) sont parallèles. Calculer la longueur RU.

Dans le triangle PUR, S est un point du segment $[PR]$ et V est un point du segment $[PU]$ tels que les droites (SV) et (RU) soient parallèles. Donc, d'après « l'égalité des 3 rapports », on a

$$\frac{PS}{PR} = \frac{PV}{PU} = \frac{SV}{RU} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{9}{13} = \frac{PV}{PU} = \frac{7}{RU}$$

On utilise

$$\frac{9}{13} = \frac{7}{RU}$$

Les produits en croix sont égaux

$$9 \times RU = 7 \times 13$$
$$9 \times RU = 91$$
$$RU = \frac{91}{9}$$

La longueur RU mesure environ $10,1\,cm$.

Exercices : 13 (indication : montrer que $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$ puis que $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OC}{OD}$) page 181 ;46 page 185 ; 37, 38 et 39 page 184 ; 20, 22 et 23 page 182.

4^e^

I Égalité des trois rapports

☐ ☐ 7 p 180
☐ ☐ 8 p 180
☐ ☐ 10 p 181

II Application : calcul de longueurs

☐ ☐ 13 p 181
(indication : montrer que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ puis que $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$)
☐ ☐ 46 p 185
☐ ☐ 37 p 184
☐ ☐ 38 p 184
☐ ☐ 39 p 184
☐ ☐ 20 p 182
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 23 p 182

4^e^

I Égalité des trois rapports

☐ ☐ 7 p 180
☐ ☐ 8 p 180
☐ ☐ 10 p 181

II Application : calcul de longueurs

☐ ☐ 13 p 181
(indication : montrer que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ puis que $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$)
☐ ☐ 46 p 185
☐ ☐ 37 p 184
☐ ☐ 38 p 184
☐ ☐ 39 p 184
☐ ☐ 20 p 182
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 23 p 182

4^e^

I Égalité des trois rapports

☐ ☐ 7 p 180
☐ ☐ 8 p 180
☐ ☐ 10 p 181

II Application : calcul de longueurs

☐ ☐ 13 p 181
(indication : montrer que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ puis que $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$)
☐ ☐ 46 p 185
☐ ☐ 37 p 184
☐ ☐ 38 p 184
☐ ☐ 39 p 184
☐ ☐ 20 p 182
☐ ☐ 22 p 182
☐ ☐ 23 p 182

— ⋆ —

Exercice 1

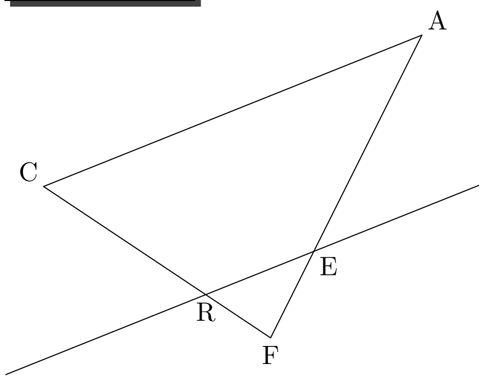
1. Construis un triangle ABC tel que $AB = 8\,cm$, $AC = 12\,cm$ et $BC = 10\,cm$.
2. Soit E le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 3,2\,cm$. La parallèle à la droite (BC) passant par E coupe le droite (AC) en D.
   Calcule la longueur AD.

Exercice 2

Construis un triangle RST tel que $RS = 8,8\,cm$, $RT = 5,6\,cm$ et $ST = 4,8\,cm$. Soit M le point du segment $[RS]$ tel que $RM = 6,6\,cm$.
La parallèle à la droite (ST) passant par M coupe le segment $[RT]$ en N.

1. Calcule la longueur MN.
2. Calcule la longueur RN. Déduis-en la longueur NT.

Exercice 3



Dans la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur), les droites (ER) et (AC) sont parallèles. On sait également que $FE = 3,5\,cm$, $FR = 4,2\,cm$, $FA = 6\,cm$, $AC = 4,8\,cm$.

1. Calcule les longueurs ER et RC.
2. Reproduis la figure en vraie grandeur sur la feuille blanche.

Exercice 4

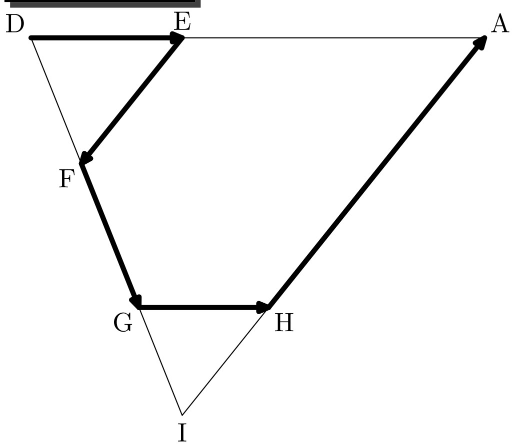
Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF = 6cm$ et $FG = 8cm$. Soit I le point du segment $[EF]$ tel que $EI = 2cm$. La perpendiculaire à la droite (EF) passant par I coupe le segment $[EG]$ en J.
Déterminer le rapport $\dfrac{EJ}{EG}$.

— ⋆⋆ —

Exercice 5

Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que $EF = 4\,cm$, $FH = 5\,cm$ et $EH = 6\,cm$.
Soit K le point du segment $[EH]$ tel que $HK = 1,2cm$.
La parallèle à la droite (EF) passant par K coupe le segment $[FH]$ en J.
Calculer les longueurs HJ et JK.

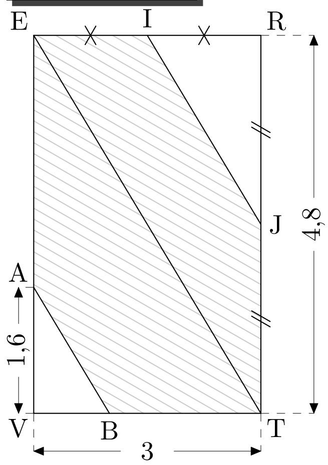
Exercice 6



Pour une épreuve d'orientation, Aurore reçoit le plan ci-contre. Sachant que les droites (EF) et (IA) sont parallèles ainsi que les droites (GH) et (DA), quelle est la longueur du parcours $DEFGHA$?

D : Départ $\quad A$: arrivée.
$DA = 600\,m$, $DE = 200\,m$, $IG = 90\,m$, $DI = 315\,m$, $IA = 390\,m$.

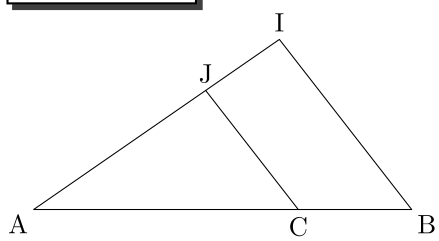
Exercice 7



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les longueurs sont données en centimètre.
$VERT$ est un rectangle. Les droite (AB) et (ET) sont parallèles. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[ER]$ et $[TR]$.

1. Calcule la longueur VB.
2. Calcule l'aire de la surface hachurée.

Exercice 8



Sur la figure ci-contre, on a $AB = 7\,m$, $AC = 4,9\,m$ et $IB = 3\,m$. Les droites (JC) et (IB) sont parallèles.
Démontre que le triangle JCB est isocèle.

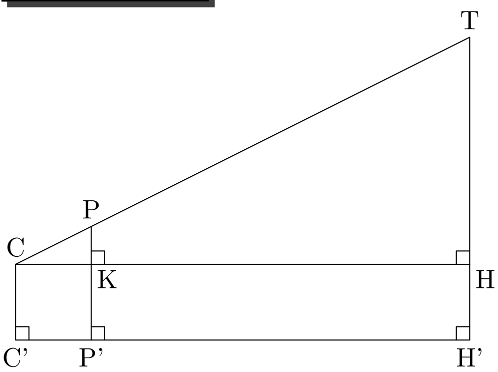
Exercice 9

Soit ABC un triangle tel que $BC = 6\,cm$. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[BC]$ tel que $BP = 1cm$.
La parallèle à la droite (AI) passant par P coupe la droite (AC) en N et la droite (AB) en M.

1. Fais une figure.
2. Montre que $\dfrac{PM}{AI} = \dfrac{1}{3}$.
3. Montre que $\dfrac{AI}{PN} = \dfrac{3}{5}$.

⋆⋆⋆

Exercice 10



Dans la figure ci-contre, on donne les mesures suivantes :
$CC' = 1,6\,m$; $PP' = 2,4\,m$; $C'P' = 2,4\,m$ et $P'H' = 8,4\,m$.

1. Calcule les longueurs PK et CH.
2. Déduis-en la longueur TH puis la longueur TH'.

Exercice 11

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de diamètre $[AM]$ tel que $AM = 12\,cm$. N est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $AN = 8\,cm$. La droite (d_1) est la perpendiculaire à la droite (AN) passant par O : elle coupe la droite (AN) en C.

1. Démontre que les droites (OC) et (MN) sont parallèles.
2. Déduis-en la position du point C sur le segment $[AN]$.
3. D est le point du segment $[AO]$ tel que $AD = 2\,cm$. La parallèle à la droite (MN) passant par D coupe la droite (AN) en E.
   Calcule la longueur EC.

Exercice 12

Soit $IJKL$ un parallélogramme et M un point du segment $[IL]$. La droite (JM) coupe la diagonale $[IK]$ en N. La parallèle à la droite (IJ) passant par N coupe la droite (IL) en E.

1. (a) Compare les rapports $\dfrac{EN}{IJ}$ et $\dfrac{MN}{MJ}$.

   (b) Compare les rapports $\dfrac{IN}{IK}$ et $\dfrac{EN}{IJ}$.

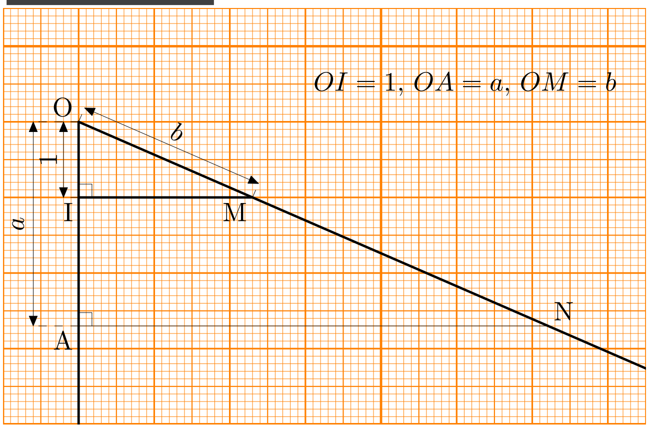
   (c) Déduis-en alors que
$$\frac{IN}{IK} = \frac{MN}{MJ}$$

2. (a) Compare les rapports $\dfrac{IN}{IK}$ et $\dfrac{IE}{IL}$.

   (b) En utilisant la question 1, montre que $\dfrac{IE}{IL} = \dfrac{ME}{MI}$

   (c) Déduis-en que
$$MI \times IE = ME \times IL$$

Exercice 13



1. En observant la figure, exprime la longueur ON en fonction de a et b. Que représente cette longueur ON pour a et b ?
2. Réalise la figure ci-contre avec $a = 4,8$ et $b = 3,5$.
   En mesurant ON, donne une valeur approchée du produit $4,8 \times 3,5$.
3. Réalise une construction pour trouver une valeur approchée du quotient de $7,9$ par $3,7$.

Exercice 14

1. Construis un triangle ABC tel que $BC = 10\,cm$, $BA = 8\,cm$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
2. Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe la droite (BC) en H.
   La perpendiculaire à la droite (AC) passant par H coupe la droite (AC) en G.
   La perpendiculaire à la droite (BC) passant par G coupe la droite (BC) en F.
   La perpendiculaire à la droite (AC) passant par F coupe la droite (AC) en E.
3. (a) Montre que les droites (AH) et (GF) sont parallèles.

   (b) Montre que
$$\frac{CG}{CA} = \frac{CF}{CH} = \frac{GF}{AH}$$

4. Montre que
$$\frac{CE}{CG} = \frac{CF}{CH} = \frac{EF}{GH}$$

5. Déduis des questions 3b et 4 que
$$\frac{EF}{GH} = \frac{FG}{AH}$$

Chapitre 8

Les Puissances

Sommaire

Programme 2004

Puissances d'exposant entier relatif.	Utiliser sur des exemples numériques, avec ou sans calculatrice scientifique, les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{mn}$; où m et n sont des entiers relatifs.	En liaison avec la physique, les activités insisteront sur l'usage des puissances de dix. Les calculatrices seront largement utilisées. Les élèves doivent maîtriser l'usage des touches correspondantes de leur calculatrice.
Notation scientifique des nombres décimaux. Ordre de grandeur d'un résultat.	Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.	Modifier l'écriture d'un nombre comme $25698,236$ sous la forme $2,5698236 \times 10^4$ ou 25698236×10^{-2} ou $25,698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves. La notation ingénieur n'est pas exigible.
	Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur.	
	Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples, des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.	Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. Pour des nombres autres que 10, on s'en tiendra au cas d'exposants simples.

I. Puissance de 10

1) Définitions

Une puissance de 10 se note sous la forme 10^m où m est un nombre relatif. Dans cette écriture, m est appelé *l'exposant*.

– **L'exposant est un entier positif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^0 = 1 \text{ et } 10^1 = 10$$

$$10^m = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{m \text{ fois le nombre } 10} = 1\,\underbrace{000\ldots0}_{m \text{ zéros}}$$

Exemples

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \qquad 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

– **L'exposant est un entier négatif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m} = \underbrace{0,00\ldots0}_{m \text{ zéros}}1$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \qquad 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,000\,01$$

2) Formules de calculs

Activité : feuille 1 (4 1$^{\text{re}}$parties)

(Admis) Soit m et n 2 nombres entiers relatifs.

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \qquad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \qquad (10^m)^n = 10^{m\times n}$$

Exemples :

$$10^4 \times 10^{-2} = 10^{4+(-2)} = 10^2 \qquad \frac{10^4}{10^{-2}} = 10^{4-(-2)} = 10^{4+2} = 10^6 \qquad \left(10^4\right)^{-2} = 10^{4\times(-2)} = 10^{-8}$$

Exercices : 20, 21, 22, 23, 24 et 26 page 49.

3) Écriture scientifique d'un nombre décimal

Activité : feuille 1 (dernière partie)

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul (différent de 0) avant la virgule et p un entier relatif

Remarque : Si $a > 0$ alors $1 \leqslant a < 10$.

Exemples
L'écriture scientifique de 385 est $3,85 \times 10^2$.
L'écriture scientifique de $A = 35\,48 \times 10^4$ est

$$A = 3,548 \times 10^1 \times 10^4 = 3,548 \times 10^{1+4} = 3,548 \times 10^5$$

Exercices : 28 et 37 page 50.
Activité : activité 2 feuille 2.

II. Puissance d'un entier relatif

1) Définition

Soit n un nombre entier positif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \quad (n \geqslant 2) \qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples

$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32 \qquad (-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = -125 \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$$

Exercices : 2 et 3 page 48.

2) Opérations sur les puissances

Activité : activité 3 feuille 2.

(Admis) Si a est un entier relatif non nul et si m et n sont des entiers relatifs alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m\times n} \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

Exemples

$$2^4 \times 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^1 = 2 \qquad \frac{4^2}{4^6} = 4^{2-6} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4}$$

$$\left(5^3\right)^{-2} = 5^{3\times(-2)} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} \qquad 7^3 \times 4^3 = (7 \times 4)^3 = 28^3$$

Activité : activité 4.
Exercices : 4, 6, 7 et 9 page 48 ; 15, 16, 18 et 19 page 49 ; 29 page 50.

Activité 1 : Opérations sur les puissances de 10

Multiplication de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $10^3 \times 10^2$	(c) $10^4 \times 10^4$	(e) $10^{-2} \times 10^5$	(g) $10^{-1} \times 10^{-2}$
(b) $10^2 \times 10^1$	(d) $10^5 \times 10^3$	(f) $10^4 \times 10^{-1}$	(h) $10^{-3} \times 10^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $\dfrac{10^5}{10^2}$	(b) $\dfrac{10^7}{10^9}$	(c) $\dfrac{10^{-2}}{10^2}$	(d) $\dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$	(e) $\dfrac{10^3}{10^4}$	(f) $\dfrac{10^5}{10^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $\left(10^2\right)^3$	(b) $\left(10^{-2}\right)^4$	(c) $\left(10^4\right)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Effet de la multiplication par une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

(a) $3,5 \times 10^4$	(b) $0,15 \times 10^3$	(c) $5815,1 \times 10^2$

2. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant positif ?
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

(a) $3,5 \times 10^{-3}$	(b) $0,15 \times 10^{-2}$	(c) $5815,1 \times 10^{-4}$

4. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant négatif ?

Écriture scientifique d'un nombre relatif

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

(a) $42,9 \times 10^3$	(c) $4\,290 \times 10$	(e) $4,29 \times 10^4$
(b) $0,429 \times 10^5$	(d) $4\,290\,000 \times 10^{-2}$	(f) $429\,000 \times 10^{-1}$

2. Que remarque-t-on ?
3. Parmi toutes ces écritures d'un même nombre décimal, une va être privilégiée : *celle dont le nombre décimal ne possède qu'un chiffre non nul avant la virgule.*
   Quelle est cette écriture ?
   Une telle écriture s'appelle *l'écriture scientifique du nombre décimal 42 900.*
4. Donne l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :
   153 57,9 0,08

Activité 3 : Opérations sur les puissances d'un entier

Multiplication de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

(a) $2^3 \times 2^2$	(c) $12^4 \times 12^4$	(e) $6^2 \times 3^5$	(g) $7^{-1} \times 7^{-2}$
(b) $5^2 \times 7^1$	(d) $(-2)^5 \times (-2)^3$	(f) $4^4 \times 4^{-1}$	(h) $9^{-3} \times 9^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

(a) $\dfrac{2^5}{2^2}$	(b) $\dfrac{3^7}{3^9}$	(c) $\dfrac{5^{-2}}{3^2}$	(d) $\dfrac{4^{-7}}{4^{-5}}$	(e) $\dfrac{7^3}{8^2}$	(f) $\dfrac{12^5}{12^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'une puissance

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

(a) $\left(5^2\right)^3$	(b) $\left((-5)^{-2}\right)^4$	(c) $\left(7^4\right)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'un produit

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

(a) $2^3 \times 5^3$	(b) $3^{-2} \times 4^{-2}$	(c) $8^2 + 6^2$	(d) $4^5 \times 6^5$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Activité 2 : Comparaison et ordre de grandeur

Comparaison

Rappel : Comparer 2 nombres, c'est dire lequel des 2 est le plus grand ou s'il y a égalité entre ses nombres.

On veut comparer les nombres :
$A = 3,23 \times 10^5$ et $B = 456 \times 10^2$.

1. (a) Expliquer pourquoi $A = 3230 \times 10^2$.
   (b) Comparer alors A et B.
2. Expliquer comment on peut comparer 2 nombres écrits avec des puissances de 10.
3. Comparer les nombres suivants :
   (a) $C = 5,78 \times 10^7$ et $D = 752 \times 10^5$.
   (b) $E = 7,83 \times 10^{-4}$ et $F = 7920 \times 10^{-8}$.

Encadrement et ordre de grandeur

On souhaite déterminer un **ordre de grandeur** du nombre $G = 7853,5 \times 10^6$.

1. (a) Écrire le nombre G en notation scientifique.
   (b) Expliquer pourquoi $10^9 < G < 10^{10}$.
   (c) Déterminer un ordre de grandeur du nombre G.
2. (a) Donner un encadrement, puis un ordre de grandeur des nombres suivants :
   $A = 376000 \times 10^6$ $\quad$ $B = 478,7 \times 10^3$ $\quad$ $C = 0,00000523 \times 10^8$.
   (b) Ranger ces nombres du plus grand au plus petit.

Activité 4 : Utilisation de la calculatrice

1. Sur la calculatrice, repérer la touche exposant qui peut être : $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$ ou encore $\boxed{\wedge}$.
2. Calculer les expressions suivantes :
   45^3 14^5 9^6 2^{14}.
3. Sur la calculatrice, repérer la touche « puissance de 10 » qui peut être : $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ ou encore $\boxed{\times 10^x}$.
4. Calculer le produit $1,7 \times 10^{-8} \times 3,96 \times 10^{-5}$. Quel est le résultat affiché par la calculatrice ? Quel est le résultat réel ?
5. Lorsque la calculatrice affiche $49,67^{18}$, de quel nombre s'agit-il ?

Activité 4 : Utilisation de la calculatrice

1. Sur la calculatrice, repérer la touche exposant qui peut être : $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$ ou encore $\boxed{\wedge}$.
2. Calculer les expressions suivantes :
   45^3 14^5 9^6 2^{14}.
3. Sur la calculatrice, repérer la touche « puissance de 10 » qui peut être : $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ ou encore $\boxed{\times 10^x}$.
4. Calculer le produit $1,7 \times 10^{-8} \times 3,96 \times 10^{-5}$. Quel est le résultat affiché par la calculatrice ? Quel est le résultat réel ?
5. Lorsque la calculatrice affiche $49,67^{18}$, de quel nombre s'agit-il ?

Activité 4 : Utilisation de la calculatrice

1. Sur la calculatrice, repérer la touche exposant qui peut être : $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$ ou encore $\boxed{\wedge}$.
2. Calculer les expressions suivantes :
   45^3 14^5 9^6 2^{14}.
3. Sur la calculatrice, repérer la touche « puissance de 10 » qui peut être : $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ ou encore $\boxed{\times 10^x}$.
4. Calculer le produit $1,7 \times 10^{-8} \times 3,96 \times 10^{-5}$. Quel est le résultat affiché par la calculatrice ? Quel est le résultat réel ?
5. Lorsque la calculatrice affiche $49,67^{18}$, de quel nombre s'agit-il ?

Activité 4 : Utilisation de la calculatrice

1. Sur la calculatrice, repérer la touche exposant qui peut être : $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$ ou encore $\boxed{\wedge}$.
2. Calculer les expressions suivantes :
   45^3 14^5 9^6 2^{14}.
3. Sur la calculatrice, repérer la touche « puissance de 10 » qui peut être : $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ ou encore $\boxed{\times 10^x}$.
4. Calculer le produit $1,7 \times 10^{-8} \times 3,96 \times 10^{-5}$. Quel est le résultat affiché par la calculatrice ? Quel est le résultat réel ?
5. Lorsque la calculatrice affiche $49,67^{18}$, de quel nombre s'agit-il ?

4^{e}

I Puissances de 10

2) Formules de calculs

☐ ☐ Activité feuille (4 1^{re}parties)
☐ ☐ 20 p 49
☐ ☐ 21 p 49
☐ ☐ 22 p 49
☐ ☐ 23 p 49
☐ ☐ 24 p 49
☐ ☐ 26 p 49

3) Écriture scientifique d'un nombre décimal

☐ ☐ Activité feuille (dernière partie)
☐ ☐ 28 p 50
☐ ☐ 37 p 50
☐ ☐ Activité 2 feuille 2

II Puissance d'un entier relatif

1) Définition

☐ ☐ 2 p 48
☐ ☐ 3 p 48

2) Opérations sur les puissances

☐ ☐ Activité 3 feuille 2
☐ ☐ Activité 4
☐ ☐ 4 p 48
☐ ☐ 6 p 48
☐ ☐ 7 p 48
☐ ☐ 9 p 48
☐ ☐ 15 p 49
☐ ☐ 16 p 49
☐ ☐ 18 p 49
☐ ☐ 19 p 49
☐ ☐ 29 p 50

4^{e}

I Puissances de 10

2) Formules de calculs

☐ ☐ Activité feuille (4 1^{re}parties)
☐ ☐ 20 p 49
☐ ☐ 21 p 49
☐ ☐ 22 p 49
☐ ☐ 23 p 49
☐ ☐ 24 p 49
☐ ☐ 26 p 49

3) Écriture scientifique d'un nombre décimal

☐ ☐ Activité feuille (dernière partie)
☐ ☐ 28 p 50
☐ ☐ 37 p 50
☐ ☐ Activité 2 feuille 2

II Puissance d'un entier relatif

1) Définition

☐ ☐ 2 p 48
☐ ☐ 3 p 48

2) Opérations sur les puissances

☐ ☐ Activité 3 feuille 2
☐ ☐ Activité 4
☐ ☐ 4 p 48
☐ ☐ 6 p 48
☐ ☐ 7 p 48
☐ ☐ 9 p 48
☐ ☐ 15 p 49
☐ ☐ 16 p 49
☐ ☐ 18 p 49
☐ ☐ 19 p 49
☐ ☐ 29 p 50

4^{e}

I Puissances de 10

2) Formules de calculs

☐ ☐ Activité feuille (4 1^{re}parties)
☐ ☐ 20 p 49
☐ ☐ 21 p 49
☐ ☐ 22 p 49
☐ ☐ 23 p 49
☐ ☐ 24 p 49
☐ ☐ 26 p 49

3) Écriture scientifique d'un nombre décimal

☐ ☐ Activité feuille (dernière partie)
☐ ☐ 28 p 50
☐ ☐ 37 p 50
☐ ☐ Activité 2 feuille 2

II Puissance d'un entier relatif

1) Définition

☐ ☐ 2 p 48
☐ ☐ 3 p 48

2) Opérations sur les puissances

☐ ☐ Activité 3 feuille 2
☐ ☐ Activité 4
☐ ☐ 4 p 48
☐ ☐ 6 p 48
☐ ☐ 7 p 48
☐ ☐ 9 p 48
☐ ☐ 15 p 49
☐ ☐ 16 p 49
☐ ☐ 18 p 49
☐ ☐ 19 p 49
☐ ☐ 29 p 50

$\star$

Exercice 1

1. Calcule l'aire d'un rectangle de longueur $10^4\,cm$ et de largeur $10^{-2}\,cm$.
2. Calcule l'aire d'un triangle de côté de base $0,82 \times 10^3\,dm$ et de hauteur relative à ce côté $2,4 \times 10^4\,dm$.

Exercice 2

Ecris sous la forme 10^n avec n un entier relatif :

$$A = 10^3 \times 10^5 \qquad B = \frac{10^7}{10^{-3}} \qquad C = \frac{10^2 \times 10^4}{10^3}$$

$$D = \frac{100 \times 10^3}{10^{-2}} \qquad E = 10 \times \left(10^2\right)^5 \qquad F = (-10)^2 \times (-10)^{-3}$$

Exercice 3

Sachant que 1 kilo de viande coûte $16\,000\,000 \times 10^{-6}$€ et que 10^4 saucisses coûtent 6 000€, combien vais-je payer pour une commande de $0,87 \times 10^{-3}$ tonnes de viande accompagnées de $70\,000 \times 10^{-4}$ saucisses ?

Exercice 4

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

$$A = 5^2 \times 5^3 \qquad B = \frac{7^4}{7^2} \qquad C = 8^2 + 6^2$$

$$D = \frac{2^3 \times 2}{2^5} \qquad E = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad F = 5^7 \times 2^4 \times 5^{-3}$$

Exercice 5

Calcule la valeur de l'expression $C = 4x^2 - 5x + 2,7$ pour $x = 3$.
Calcule la valeur de l'expression $D = 5x^3 + 6x^2 - 10$ pour $x = 10$.

$\star\star$

Exercice 6

1. Donne l'écriture décimale de
   $$4,05 \times 10^4 \qquad\qquad 10,02 \times 10^{-3}$$
2. Donne l'écriture scientifique de
   $$12,45 \qquad\qquad 0,0234$$
3. Ecris sous forme d'une puissance de 10 les expressions suivantes. Ensuite, donne les résultats sous forme décimale et scientifique.

$$A = 2,5 \times 10^2 \times 4 \times 10^5 \qquad B = \frac{21 \times 10^3}{0,7 \times 10^{-7}} \qquad C = 4 \times 10^5 + 6 \times 10^3$$

Exercice 7

La luminosité du Soleil est de 4×10^{26} Watts, celle d'une centrale électrique est 4 milliards de Watts. Combien faut-il de centrales électriques pour éclairer de la même façon que le Soleil ? On donnera le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

Exercice 8

La distance moyenne d de la Tere au Soleil est d'environ 149,5 millions de kilomètres.

1. Donne la notation scientifique de d.
2. Le rayon R de la Terre mesure approximativement 6 400 kilomètres.
   Calcule à une unité près par défaut le quotient $\dfrac{d}{R}$.
3. Sachant que la vitesse de propagation de la lumière est environ égale à 300 000 kilomètres par seconde, calcule en minutes et secondes le temps t mis par la lumière émise par le Soleil pour nous parvenir sur Terre. Ce temps sera donné à une seconde près par excès.

Exercice 9

Effectue le calcul suivant en faisant apparaître toutes les étapes intermédiaires :

$$G = 7,5 \times 10^3 + 35 \times 10^{-2}$$

Exercice 10

1. Je parcours $8\,m$ en 1 seconde.
   Combien de temps vais-je mettre pour parcourir $100\,m$?
2. La lumière parcourt $3 \times 10^5\,km$ en 1 seconde ?
   Combien de temps va mettre la lumière pour parcourir la distance Soleil-Terre, c'est-à-dire $1,5 \times 10^8\,km$?

Exercice 11

1. En détaillant les calculs, donne la notation scientifique puis l'écriture décimale de :

$$C = \frac{4 \times 10^6 \times 3,3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^3}$$

2. Le physicien Avogadro a montré qu'il y avait environ $6,03 \times 10^{23}$ molécules d'eau dans $18\,g$ d'eau. Combien y a-t-il de molécules d'eau dans un millionième de gramme d'eau ? Donner ce résultat en notation scientifique.

Exercice 12

Donne l'écriture décimale et l'écriture scientifique des expressions suivantes

$$E = 5,5 \times 10^7 \times 0,4 \times 10^{-9} \qquad F = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-4}}{1,2 \times 10^3}$$

⋆⋆⋆

Exercice 13

Un atome est formé d'un noyau et d'électrons qui gravitent autour du noyau. Représentons par une boule de $8\,cm$ de diamètre le noyau d'un atome qui mesure en réalité $4 \times 10^{-12}\,mm$ de diamètre.

1. Quelle échelle utilise-t-on ? (C'est le nombre par lequel on a multiplié le diamètre du noyau).
2. A quelle distance devrait être placé, sur le dessin, un électron qui tourne en réalité à $5 \times 10^{-8}\,mm$ du noyau ?
3. A cette échelle, un électron est représenté par une minuscule boule de $0,2\,mm$ de diamètre. Quel est le diamètre réel, en mm, d'un électron ?

Exercice 14

1. Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 45\,000 \qquad B = 0,000\,073 \qquad C = 47\,000 \times 10^3 \qquad D = 0,052 \times 10^{-4}$$

2. Calcule et donne le résultat en écriture scientifique : $E = 15 \times \left(10^7\right)^2 \times 3 \times 10^{-5}$
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$F = \frac{10^{-8} \times 0,7 \times 10^{12}}{21 \times 10^3}$$

Exercice 15

$\mathcal{C}_1$ est un disque de rayon R. Le rayon de $\mathcal{C}_2$ est le double de celui de $\mathcal{C}_1$; celui de $\mathcal{C}_3$ est le double de celui de $\mathcal{C}_2$, etc...

1. Calculer le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{C}_1$ en fonction de R.
   Que valent $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{A}_1$ si $R = 3$?
2. Calculer le périmètre et l'aire de $\mathcal{C}_4$ en fonction de R. Comparer avec les résultats de $\mathcal{C}_1$.

Chapitre 9

Équations du 1$^{\text{er}}$ degré à 1 inconnue

Sommaire

Programme 2004

Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue.	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	Les problèmes issus d'autres parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. On dégagera chaque fois sur des problèmes particuliers les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat. Tous les problèmes aboutissant à des équations produits, du type $(x-2)(2x-3)=0$, sont hors programme.

I. Égalités et opérations

> Lorsque deux quantités sont égales, cela se traduit mathématiquement par *une égalité.*
>
> $$\underbrace{\text{expression A}}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} = \underbrace{\text{expression B}}_{2^{\text{e}} \text{ membre}}$$

On ne change pas une égalité si on ajoute (ou on soustrait) le même nombre aux deux membres de l'égalité.

<u>Si</u> $a = b$ <u>alors</u> $a + c = b + c$.
<u>Si</u> $a = b$ <u>alors</u> $a - d = b - d$.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{array}{rcl} & 2 \text{ cahiers } + 2 \text{ livres } = 1 \text{ cahier } + 15€ & \\ -1 \text{ cahier} & & -1 \text{ cahier} \\ & 1 \text{ cahier } + 2 \text{ livres } = 15€ & \end{array}$$

On ne change pas une égalité si on multiplie (ou on divise) par le même nombre **<u>non nul</u>** les deux membres de l'égalité.

<u>Si</u> $a = b$ et $c \neq 0$ <u>alors</u> $a \times c = b \times c$.
<u>Si</u> $a = b$ et $d \neq 0$ <u>alors</u> $a \div d = b \div d$.

<u>Exemple</u> :

$$\begin{array}{rcl} & 2 \text{ cahiers } + 2 \text{ livres } = 30€ & \\ \div 2 & & \div 2 \\ & 1 \text{ cahier } + 1 \text{ livre } = 15€ & \end{array}$$

<u>Activité :</u> 5 page 124 (a)

II. Équation du 1^{er} degré à 1 inconnue

1) Définitions

Une équation est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, le plus souvent représenté par une lettre.

<u>Exemple</u> : $2x = 3$, $-2 + 3x = 7 + 4x$ sont des équations.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu qui vérifient l'égalité. Chacune de ces valeurs est appelée une solution de l'équation.

<u>Exemple</u> Soit l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.
Si $x = 1$ alors

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5 = 2 \times 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \\ \\ 3x + 2 = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5 \end{array}\right\} 7 \neq 5$$

Pour $x = 1$, $2x + 5 \neq 3x + 2$ donc 1 n'est pas solution de l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.
Si $x = 3$ alors

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11 \\ \\ 3x + 2 = 3 \times 3 + 2 = 9 + 2 = 11 \end{array}\right\} 7 = 5$$

Pour $x = 3$, $2x + 5 = 3x + 2$ donc 3 est solution de l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.
<u>Activité :</u> 8 page 125
<u>Exercice :</u> 6 page 130

2) Équations de référence

Pour ces équations, a, b, c et d sont des nombres et l'inconnue est notée x.

Cas n°1

$$a \times x = b \quad (a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 3x &= 7 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{7}{3} \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -5x &= 8 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{8}{-5} \\ x &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

Cas n°2

$$a \times x + b = c \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$\begin{aligned} -2x - 5 &= 9 \\ -2x \underbrace{-5+\mathbf{5}} &= 9+\mathbf{5} \\ -2x &= 14 \qquad \text{Cas n°1} \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{1}{4}-2 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Cas n°3

$$a \times x + b = c \times x + d \quad (a \neq 0, c \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 7x - 9 \\ 3x-\mathbf{7}x + 5 &= \underbrace{7x-\mathbf{7}x} -9 \\ -4x + 5 &= -9 \qquad \text{Cas n°2} \\ -4x \underbrace{+5-\mathbf{5}} &= 9-\mathbf{5} \\ -4x &= 4 \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{4}{-4} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

<u>Cas particuliers :</u>
Les 2 cas suivants sont très rares, mais peuvent apparaître :

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= \quad (3x + 1) + 2 \\ 3x + 3 &= \qquad\quad 3x + 3 \end{aligned}$$

Or Quelques soient les valeurs de x, cette égalité est vraie, tous les nombres connus sont solutions de cette équation.

$$\begin{aligned} 4x + 12 &= \quad 4x - 15 \\ 4x - 4x + 12 &= \quad -15 \\ 12 &= \quad -15 \end{aligned}$$

Cette égalité est fausse, il n'y a donc pas de solutions à cette équation.

Exercices : 9, 10 et 12 page 130 ; 14 page 131 ; 31, 35 et 37 page 133 ; 45 et 46 page 134.

III. Mise en équation d'un problème

> Mettre en équation un problème, c'est traduire mathématiquement par une équation ce qui est dit en français.

Exemple *Un père de 45 ans a 3 enfants âgés de 6, 9 et 12 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?*

Choix de l'inconnue Soit x le nomnbre d'années cherché.

Mise en équation du problème Dans x années,

- L'âge du père sera $45 + x$;
- Les âges des enfants seront $6 + x$, $9 + x$ et $12 + x$.

On obtient donc l'équation suivante :

$$\underbrace{45 + x}_{\text{âge du père}} = \underbrace{6 + x + 9 + x + 12 + x}_{\text{Somme des âges des enfants}}$$

Résolution de l'équation

$$\begin{aligned} 45 + x &= 6 + x + 9 + x + 12 + x \\ 45 + x &= 27 + 3x \\ 45 \underbrace{+x - x} &= 27 + 3x - x \\ 45 &= 27 + 2x \\ 45 - \mathbf{27} &= \underbrace{27 - \mathbf{27}} + 2x \\ 18 &= 2x \\ \frac{18}{2} &= \frac{2x}{2} \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Conclusion Dans 9 ans, l'âge du père (45+9=54) sera égal à la somme des âges de ces enfants (6+9+9+9+12+9=15+18+21=54).

Activité : 12 page 126.

Exercices : 16 page 132 ; 24 et 25 page 132 ; 33 et 34 page 133 ; 48 page 134 ; 20 page 131.

4^{e}

I Égalités et opérations

☐ ☐ Activité 5 (a) p 124

II Équation du 1erdegré à une inconnue

1) Définitions

☐ ☐ Activité 8 p 125
☐ ☐ 6 p 130

2) Équations de référence

☐ ☐ 9 p 130
☐ ☐ 10 p 130
☐ ☐ 12 p 130
☐ ☐ 14 p 131
☐ ☐ 31 p 133
☐ ☐ 35 p 133
☐ ☐ 37 p 133
☐ ☐ 45 p 134
☐ ☐ 46 p 134

III Mise en équation de problèmes

☐ ☐ Activité 12 p 126
☐ ☐ 16 p 132
☐ ☐ 24 p 132
☐ ☐ 25 p 132
☐ ☐ 33 p 133
☐ ☐ 34 p 133
☐ ☐ 48 p 134
☐ ☐ 20 p 131

4^{e}

I Égalités et opérations

☐ ☐ Activité 5 (a) p 124

II Équation du 1erdegré à une inconnue

1) Définitions

☐ ☐ Activité 8 p 125
☐ ☐ 6 p 130

2) Équations de référence

☐ ☐ 9 p 130
☐ ☐ 10 p 130
☐ ☐ 12 p 130
☐ ☐ 14 p 131
☐ ☐ 31 p 133
☐ ☐ 35 p 133
☐ ☐ 37 p 133
☐ ☐ 45 p 134
☐ ☐ 46 p 134

III Mise en équation de problèmes

☐ ☐ Activité 12 p 126
☐ ☐ 16 p 132
☐ ☐ 24 p 132
☐ ☐ 25 p 132
☐ ☐ 33 p 133
☐ ☐ 34 p 133
☐ ☐ 48 p 134
☐ ☐ 20 p 131

4^{e}

I Égalités et opérations

☐ ☐ Activité 5 (a) p 124

II Équation du 1erdegré à une inconnue

1) Définitions

☐ ☐ Activité 8 p 125
☐ ☐ 6 p 130

2) Équations de référence

☐ ☐ 9 p 130
☐ ☐ 10 p 130
☐ ☐ 12 p 130
☐ ☐ 14 p 131
☐ ☐ 31 p 133
☐ ☐ 35 p 133
☐ ☐ 37 p 133
☐ ☐ 45 p 134
☐ ☐ 46 p 134

III Mise en équation de problèmes

☐ ☐ Activité 12 p 126
☐ ☐ 16 p 132
☐ ☐ 24 p 132
☐ ☐ 25 p 132
☐ ☐ 33 p 133
☐ ☐ 34 p 133
☐ ☐ 48 p 134
☐ ☐ 20 p 131

★

Exercice 1

Résous les équations suivantes

$$-4+x=5 \qquad 2x+1=7 \qquad -2x+3=x$$
$$-3x=9 \qquad -3+4x=8 \qquad -3x+17=4x-11$$

Exercice 2

Résous les équations suivantes :

$$-3x+2=8 \qquad 2x+4=7x-11$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1/ $7x=5$ | **2/** $2x+7=3$ | **3/** $3x-2=6x+8$

★★

Exercice 4

Dans une assemblée, les $\frac{3}{4}$ des participants sont des femmes, les $\frac{2}{3}$ des hommes portent des lunettes et l'on compte 10 hommes qui ne portent pas de lunettes.
Combien y-a-t-il de participants au total ?

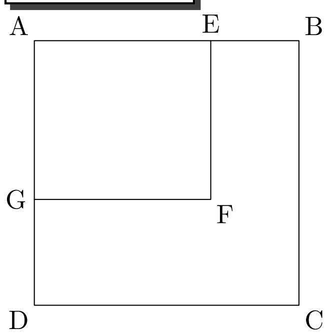
Exercice 5

On a chargé dans un camion trois types de caisses : des rouges qui pèsent chacune $60\,kg$, des bleues qui pèsent chacune $50\,kg$ et des vertes qui pèsent chacune $40\,kg$. Il y a trois fois plus de caisses bleues que de rouges et deux fois plus de caisses vertes que de bleues.
Le chargement de ce camion a une masse de $900\,kg$. Détaille son chargement.

Exercice 6

Sur un parking, on peut observer 50 véhicules en stationnement. Ces véhicules sont tous des motos ou des automobiles.
Si le nombre total de roues est 180, quel est le nombre d'automobiles sur ce parking ?

Exercice 7



L'unité de longueur est le mètre.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de 60 de côté ; AE mesure 40 et on pose $DG=x$.

1. Exprime en fonction de x l'aire du rectangle $AEFG$.
2. Trouve la valeur de x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit le quadruple de celle du rectangle $AEFG$.

Exercice 8

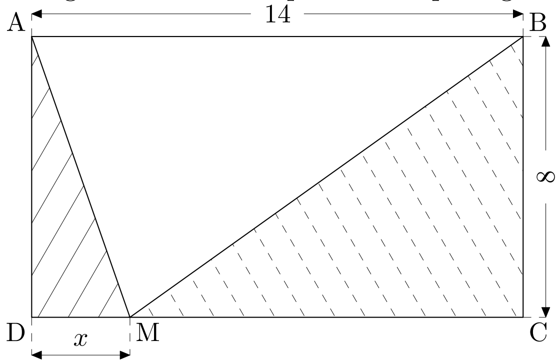
1/ Résoudre l'équation suivante

$$5x+3\times(40-x)=180$$

2/ Simon a 40 livres, les uns ont une épaisseur de $5\,cm$, les autres une épaisseur de $3\,cm$. S'ils les range sur un même rayon, ils occupent une longueur égale à $1,80\,m$.
Quel est le nombre de livres de $5\,cm$? Quel est le nombre de livres de $3\,cm$?
On appelera x le nombre de livres de $5\,cm$ d'épaisseur.

Exercice 9

Un agriculteur veut partager son terrain en trois parcelles : une pour lui et une pour chacun de ses 2 fils. La figure ci-dessous représente le partage envisagé par l'agriculteur.



On dispose des informations suivantes :
- $ABCD$ est un rectangle ;
- M appartient au segment $[CD]$;
- $DM = x$;
- les surfaces hachurées sont les surfaces destinées aux fils.

Aide l'agriculteur à choisir x pour que les deux fils aient la même superficie de terrain.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 10

Soit n et $n+1$ deux nombres entiers consécutifs. Si on ajoute 5 à chacun de ces deux nombres, leur produit augmente de 160.
Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 11

Détermine, si possible, trois nombres entiers consécutifs tels que le produit du premier et du troisième soit égal au carré de deuxième.

Exercice 12

« Aujourd'hui, tu es deux fois plus âgé que moi, dit un fils à son père. Et dans 10 ans, poursuit-il, la somme de nos âges égalera le double de ton âge actuel. » Quel est l'âge actuel du fils ?

Exercice 13

Jean a obtenu 18; 09; 12 en Devoir Maison (coefficient 1) et 08 en Devoir Surveillé (coefficient 3). Combien doit-il obtenir au prochain Devoir Surveillé pour avoir 10 de moyenne ? De quel pourcentage a-t-il réduit ou augmenté sa note de Devoir Surveillé ?

Chapitre 10

Applications de la proportionnalité

Sommaire

Programme 2004

Représentations graphiques. Proportionnalité	Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.	On fera travailler les élèves à la fois sur des exemples et des contre-exemples de situations de proportionnalité.
Applications de la proportionnalité Vitesse moyenne Grandeurs quotients courantes.	Utiliser l'égalité $d = vt$ pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps. Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).	Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km.h^{-1} et le retour à 30 km.h^{-1}. Les compétences exigibles se réduisent aux vitesses mais d'autres situations de changements d'unités méritent d'être envisagées : problèmes de change monétaire, consommation de carburant d'un véhicule en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre.
Calculs faisant intervenir des pourcentages.		En liaison avec d'autres disciplines (géographie,...), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.
	Mettre en oeuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.	Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en oeuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs. Par exemple, connaissant le pourcentage d'un caractère dans deux groupes d'effectifs différents, déterminer le pourcentage obtenu après réunion des deux groupes.

I. Proportionnalité et représentation graphique

Dans un tableau de nombres, <u>si</u> l'on peut passer des nombres d'une ligne aux nombres de l'autre ligne par une même multiplication <u>alors</u> ce tableau est un tableau de proportionnalité.

3	5	9
7,5	12,5	22,5

$\times 2,5$

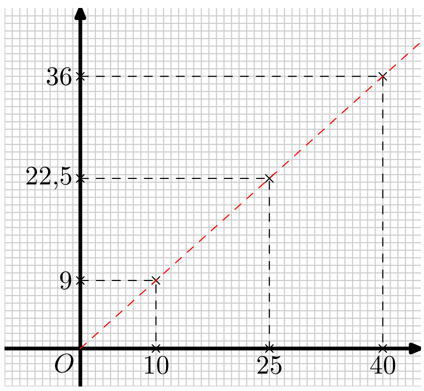
Sur une représentation graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité lorsque tous les points sont alignés avec l'origine du repère.

<u>Activité :</u> 1 page 57 (rajouter 0 pour les valeurs de x).

10	25	40
9	22, 5	36

$$\underbrace{\frac{9}{10} = \frac{22,5}{25} = \frac{36}{40}}$$

les quotients sont égaux

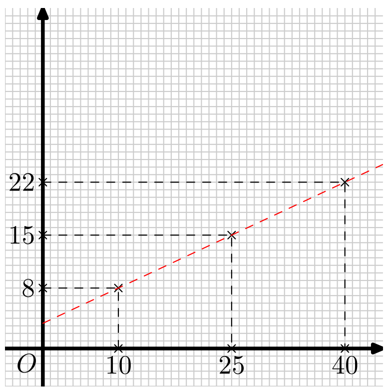


PROPORTIONNALITÉ

10	25	40
8	15	22

$$\underbrace{\frac{8}{10} \quad \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}}$$

les quotients ne sont pas égaux

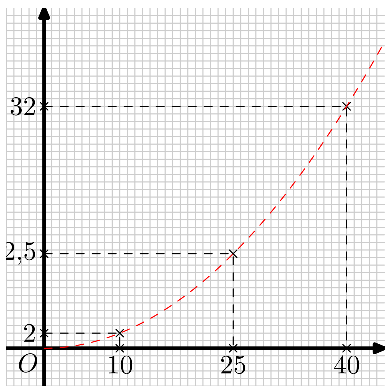


NON PROPORTIONNALITÉ

10	25	40
2	12, 5	32

$$\underbrace{\frac{2}{10} \quad \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}}$$

les quotients ne sont pas égaux



NON PROPORTIONNALITÉ

<u>Exercices :</u> 1 et 3 page 65 ; 25, 30 et 32 page 68.

II. Vitesse moyenne

<u>Si</u> l'on a parcouru une distance d pendant un temps t <u>alors</u> , sur ce parcours, **la vitesse moyenne** v est le quotient de la distance parcourue d par le temps t du trajet.

$$v = \frac{d}{t}$$

<u>Remarque :</u> On a aussi : $d = vt$.

<u>Exemple :</u> En parcourant 120 km en 2 heures, la vitesse moyenne est $\frac{120}{2} = 60\,km/h$ ou $60\,km.h^{-1}$.

En parcourant $30\,m$ en 5 secondes, la vitesse moyenne est $\frac{30}{5} = 6\,m/s$ ou $6\,m.s^{-1}$.

<u>Exercices :</u> 5, 6, 7 et 8 page 66.

III. Pourcentages

Calculer ou appliquer un pourcentage, c'est utiliser la proportionnalité.

Exemple :

1. Sur 425 élèves du collège A, 102 sont en classe de 4^e. Calculer le pourcentage d'élèves en 4^esur l'ensemble des élèves du collège.

2. Ce pourcentage est le même dans le collège B qui compte 675 élèves. Calculer le nombre d'élèves de 4^edans ce collège.

1.

nombre d'élèves du collège	425	100
nombre d'élèves en 4^e	102	x

$x = \dfrac{102 \times 100}{425} = 24.$

Il y a 24% d'élèves en 4^e.

2.

nombre d'élèves du collège	675	100
nombre d'élèves en 4^e	y	24

$y = \dfrac{24 \times 675}{100} = 162.$

Il y a 162 élèves en 4^edans le collège B.

Exemple :

Dans le collège A, 44% des élèves sont demi-pensionnaires. Dans le collège B, 56% des élèves sont demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires sur l'ensemble des élèves des deux collèges A et B ?

nombre d'élèves du collège	425	100
nombre d'élèves DP	x	44

$x = \dfrac{425 \times 44}{100} = 187$

Il y a 187 élèves DP dans le collège A.

nombre d'élèves du collège	675	100
nombre d'élèves DP	y	56

$y = \dfrac{675 \times 56}{100} = 378$

Il y a 378 élèves DP dans le collège B.

nombre d'élèves des 2 collèges	1100	100
nombre d'élèves DP	565	z

$z = \dfrac{565 \times 100}{1100} \simeq 51,4$

Il y a 51,4% d'élèves DP sur les 2 collèges.

Exercices : 9, 11 et 14 page 66 ; 19, 20 et 21 page 67 ; 35 et 44 page 69.

4^{e}

I Proportionnalité...

- ☐ ☐ activité 1 p 57
- ☐ ☐ 1 p 65
- ☐ ☐ 3 p 65
- ☐ ☐ 25 p 68
- ☐ ☐ 30 p 68
- ☐ ☐ 32 p 68

II Vitesse moyenne

- ☐ ☐ 5 p 66
- ☐ ☐ 6 p 66
- ☐ ☐ 7 p 66
- ☐ ☐ 8 p 66

III Pourcentage

- ☐ ☐ 9 p 66
- ☐ ☐ 11 p 66
- ☐ ☐ 14 p 66
- ☐ ☐ 19 p 67
- ☐ ☐ 20 p 67
- ☐ ☐ 21 p 67
- ☐ ☐ 35 p 69
- ☐ ☐ 44 p 69

4^{e}

I Proportionnalité...

- ☐ ☐ activité 1 p 57
- ☐ ☐ 1 p 65
- ☐ ☐ 3 p 65
- ☐ ☐ 25 p 68
- ☐ ☐ 30 p 68
- ☐ ☐ 32 p 68

II Vitesse moyenne

- ☐ ☐ 5 p 66
- ☐ ☐ 6 p 66
- ☐ ☐ 7 p 66
- ☐ ☐ 8 p 66

III Pourcentage

- ☐ ☐ 9 p 66
- ☐ ☐ 11 p 66
- ☐ ☐ 14 p 66
- ☐ ☐ 19 p 67
- ☐ ☐ 20 p 67
- ☐ ☐ 21 p 67
- ☐ ☐ 35 p 69
- ☐ ☐ 44 p 69

4^{e}

I Proportionnalité...

- ☐ ☐ activité 1 p 57
- ☐ ☐ 1 p 65
- ☐ ☐ 3 p 65
- ☐ ☐ 25 p 68
- ☐ ☐ 30 p 68
- ☐ ☐ 32 p 68

II Vitesse moyenne

- ☐ ☐ 5 p 66
- ☐ ☐ 6 p 66
- ☐ ☐ 7 p 66
- ☐ ☐ 8 p 66

III Pourcentage

- ☐ ☐ 9 p 66
- ☐ ☐ 11 p 66
- ☐ ☐ 14 p 66
- ☐ ☐ 19 p 67
- ☐ ☐ 20 p 67
- ☐ ☐ 21 p 67
- ☐ ☐ 35 p 69
- ☐ ☐ 44 p 69

⸻ ⋆ ⸻

Exercice 1

Dans un collège, il y a 575 élèves. Une enquête a permis d'obtenir les renseignements suivants : 8% des élèves viennent au collège en voiture ; 92 élèves viennent à pied ; $\frac{1}{5}$ des élèves viennent à vélo ; les autres élèves viennent en autobus.

1. Combien d'élèves viennent en voiture ?
2. Calculer le pourcentage d'élèves qui viennent :

   (a) à vélo ; (b) à pied ; (c) en autobus.

Exercice 2

Un blouson a un prix réel de 120€.

1. Le vendeur consent à faire une remise de 20% sur le prix réel. Quel est le nouveau prix du blouson ?
2. Le client est encore indécis. Alors le vendeur décide de solder le blouson à 81,6€. Quel pourcentage du prix après la première remise représente la deuxième remise ?
3. Quel pourcentage du prix réel représente le total des deux remises ?
   Que remarque-t-on ?

Exercice 3

Pendant ses vacances au Japon, Isabelle a acheté un guide touristique 2 100 yens.« Ce guide me revient à 18,9€ », a-t-elle calculé. Elle souhaite rapporter à sa sœur un magnifique kimono dont le prix affiché est 6 300 yens.
Quel est le prix en euros du kimono ?

Exercice 4

A la sortie d'une agglomération, on a relevé, un certain jour, la répartition par tranches horaires des 6 400 véhicules quittant la ville entre 16 heures et 22 heures. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tranche horaire	16h-17h	17h-18h	18h-19h	19h-20h	20h-21h	21h-22h
Nombres de véhicules	1 100	2 000	1 600	900	450	350

Calcule le pourcentage de véhicules quittant la ville entre 16h et 20h.

Exercice 5

Sur les 400 indiens de la tribu des Pieds-Bleus, 4% portent un plume. Sur les 96% restants, la moitié en porte deux, l'autre moitié aucune.
Combien y-a-t-il de plumes dans la tribu des Pieds-Bleus ?

Exercice 6

Le granit est une roche cristalline formée d'un mélange hétérogène de quatre éléments : quartz, feldspath, biotite et minéraux secondaires.

1. Un bloc de granit est composé de 28% de quartz, 53% de feldspath, 11% de biotite, $19,2\,dm^3$ de minéraux secondaires.
   Calcule le volume de ce bloc.
2. Un mètre cube de ce granit a une masse de 2,6 tonnes.
   Calcule la masse du bloc de granit considéré dans la question 1.

Exercice 7

On a suspendu à un ressort différentes masses pour mesurer l'allongement l du ressort. On a obtenu les résultats notés dans le tableau ci-dessous.

masse (g)	100	200	300	400	500	600	700	800
l (cm)	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,3	4

1. Sur le papier quadrillé ci-contre, représente graphiquement ces données.
2. A l'aide du graphique, justifie si ce tableau est un tableau de proportionnalité ou non ?
3. Comment peut-on contrôler, à l'aide du tableau, le résultat de la question précédente ?

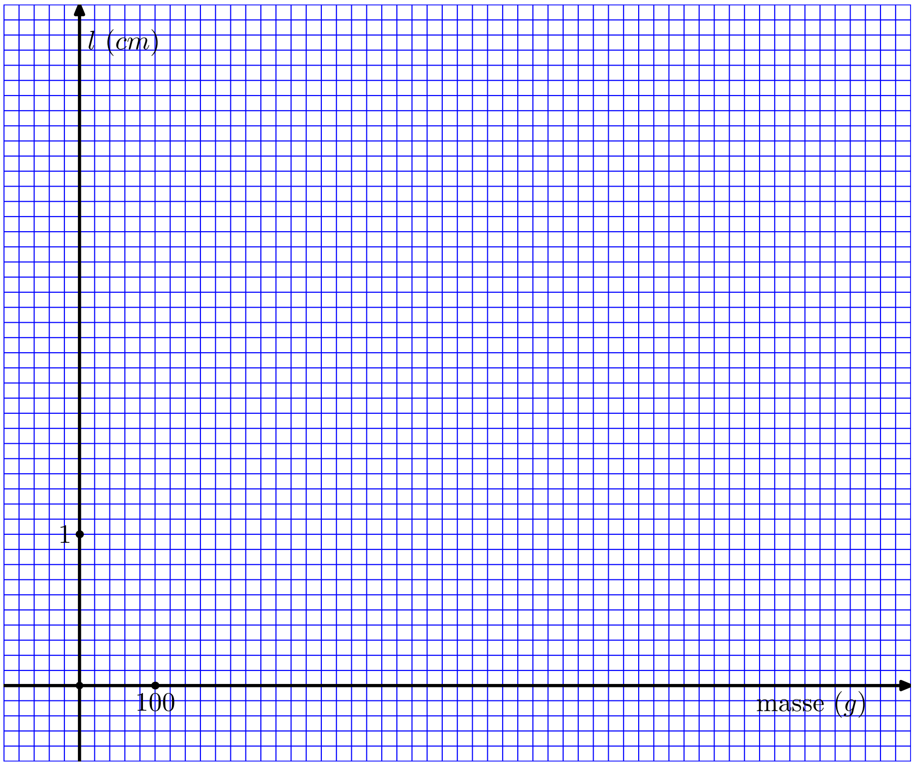


FIG. 10.1 – Papier millimétré à utiliser

★★

Exercice 8

Un automobiliste A parcourt 658,8 km avec un plein d'essence de 36 litres payé 251,28 francs (38,31€).

1. Combien coûte un litre d'essence ?
2. Quelle est sa consommation d'essence pour 100 km ? Combien coûtent, en francs, ces 100 km au niveau de l'essence ?
3. Un automobiliste B a, quant à lui, un coût de revient des 100 km égal à 40 francs (6,10€).
   Exprime le pourcentage d'augmentation des coûts de revient des 100 km des automobilistes A et B.
4. Le prix de l'essence baisse de 2%. Quel est le nouveau coût, en francs, de 100 km pour l'automobiliste A ?

Exercice 9

Dans un collège, 51% des élèves sont demi-pensionnaires. Parmi ceux-ci, $\dfrac{2}{3}$ sont des filles.

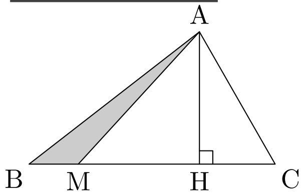
1. Quelle fraction des élèves du collège représentent les filles demi-pensionnaires ?
2. Sachant qu'il y a 700 élèves dans le collège, combien y-a-t-il de filles demi-pensionnaires ? de garçons demi-pensionnaires ?

Exercice 10

L'indice CAC 40 mesure l'activité boursière française. A la bourse de Paris :
– l'ouverture se fait à 9h00 : le niveau du CAC 40 est alors celui de la veille ;
– la fermeture ou « clôture » s'effectue à 17h30 : on arrêt alors les cotations et on affiche la tendance finale : hausse ou baisse.

Le 6 Août 2001, le CAC 40 a clôturé en hausse de 0,69% et le 7 Août 2001, il affichait une baisse finale de 0,29%. Son niveau était alors de 5051,65 points.
Quel était alors son niveau le 6 Août 2001 à l'ouverture ?

Exercice 11



ABC est un triangle donc le côté $[BC]$ mesure $7\,cm$ et dont la hauteur $[AH]$ mesure $4\,cm$.
On place un point M sur le côté $[BC]$ et on pose $BM = x$ (en cm).
On fait varier cette distance BM et on s'intéresse à l'aire du triangle ABM que l'on note $\mathcal{A}$.

1. Quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale que peut prendre x ?
2. Si $x = 2$, que vaut l'aire A ?
3. Exprime, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$.
4. Recopie et complète alors le tableau suivant :

x **(en** cm**)**	2	4,1	5	
Aire $\mathcal{A}$				7

5. Représente les données du tableau précédent par un graphique représentant l'aire du triangle BAM en fonction de la longueur BM. (On utilisera du papier millimétré et on prendra, en abscisse $1\,cm$ pour $1\,cm$ et, en ordonnée, $1\,cm$ pour $1\,cm^2$.)
6. Quelle conclusion peut-on faire ?

Exercice 12

Un automobiliste roule 15 minutes à la vitesse de 80 kilomètres par heure puis 1 heure et 45 minutes à la vitesse de 120 kilomètres par heure.

1. Vérifie par le calcul que la distance totale parcourue est $230\,km$.
2. Calcule la vitesse moyenne sur cette distance totale.

Exercice 13

Article	Prix avant soldes (en €)	Remise en %	Remise en €	Nouveau prix (en €)
Pantalon	29	15		
Chemise	22		4,4	
Veste		20		55,2

On a relevé, dans le tableau ci-dessus, les différents prix d'articles en soldes.
Recopie et compléte le tableau (tous les calculs nécessaires doivent apparaître sur la copie).

Exercice 14

Dans deux classes de 4^{e} d'un collège, on organise une enquête pour décider de l'ouverture d'un club d'échecs. En 4^{e}A, 6 élèves sur 24 souhaitent l'ouverture. En 4^{e}B, 10 élèves sur 29 souhaitent l'ouverture.

1. Calcule, pour chaque classe, le pourcentage des élèves souhaitant l'ouverture du club.
2. Le club n'existera que si au moins 30% des élèves de l'ensemble des deux classes ont répondu « oui ». Le club ouvrira-t-il ?

Exercice 15

Il a été demandé aux familles de deux villages voisins S et T de répondre à la question suivante :« Etes-vous favorable à l'aménagement d'une piste cyclable entre les deux villages ? »

1. (a) Dans le village S, 60% des 135 familles consultées ont répondu« oui ».
   Combien de familles, dans ce village, sont favorables à ce projet ?

(b) Dans le village T, il y a 182 réponses favorables sur les 416 familles consultées.
Quel est le pourcentage de« oui » pour le village T ?

2. La décision d'aménager la piste cyclable ne peut être prise qu'avec l'accord de la majorité des familles de l'ensemble des deux villages. La piste cyclable sera-t-elle réalisée ?

⋆⋆⋆

Exercice 16

Sur la route, lorsqu'un évènement imprévu survient, le conducteur réagit avec un temps de retard d'environ 1 seconde et la voiture parcourt encore une certaine distance qui dépend de la vitesse à laquelle roule le véhicule.
Le tableau ci-dessous indique différents résultats de relevés effectués par La Gendarmerie Nationale.

Vitesse en $km.h^{-1}$	50	70	100
Distance parcourue pendant le temps de réaction	14	19,6	28

1. Ce tableau correspond-il à une situation de propotionnalité ?
2. Quelle est la distance parcourue pendant le temps de réaction si l'on roule à $90\,km.h^{-1}$? Et à $130\,km.h^{-1}$?
3. A quelle vitesse roule-t-on si la distance de réaction est $30,8\,m$?
4. Fais un graphique représentant cette situation et explique comment retouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 17

Un motocycliste et un cycliste partent à la même heure, du même endroit et sur la même route. Le motocycliste a parcouru $80\,km$ en $1\,h\,20\,min$ et le cycliste a parcouru $35\,km$ en $1\,h\,10\,min$.

1. Quelle est la vitesse moyenne du motocycliste et du cycliste sur ce parcours ?
2. Quelle distance ont parcouru le motocycliste et le cycliste en $1\,h\,45\,min$?
3. La distance totale de leur trajet est de $190\,km$.
   (a) Au $65^{e}km$, le motocycliste crève, répare et au moment de repartir s'aperçoit qu'il a été rattrapé par le cycliste. Combien de temps a duré la réparation du motocycliste ?
   (b) Après cette crevaison, le motocycliste décide d'augmenter sa vitesse de 8%. Combien de temps devra-t-il attendre le cycliste une fois arrivé ?

Exercice 18

Un automobiliste parcourt $270\,km$ de jour à la vitesse moyenne de $80\,km/h$.
Puis, avec la nuit et par temps de pluie, l'automobiliste réduit sa vitesse de 20% et roule ainsi pendant $4h15\,min$.

1. Calcule la durée du trajet de jour.
2. Montre que cette durée peut s'écrire $3\,h\,22\,min\,30\,s$.
3. Calcule la distance parcourue de nuit.
4. Calcule la vitesse moyenne de l'automobiliste sur l'ensemble du voyage.

Chapitre 11

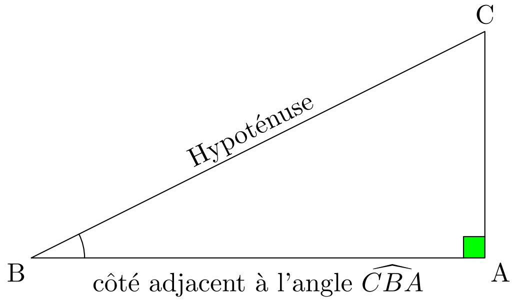
Cosinus d'un angle aigu

Sommaire

Programme 2004

Cosinus d'un angle.	Utiliser, pour un triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des deux côtés adjacents. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée : - du cosinus d'un angle aigu donné, - de l'angle aigu dont on donne le cosinus.	La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueurs. On peut également le définir comme l'abscisse d'un point sur le quart de cercle trigonométrique situé dans le premier quadrant.

I. Vocabulaire

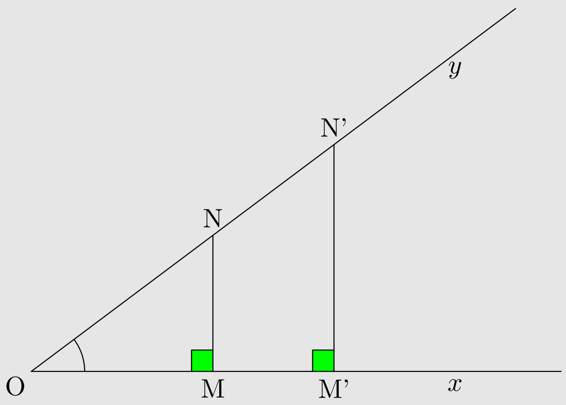


Si ABC est un triangle rectangle en A alors
– $[BA]$ est le **côté adjacent** de l'angle $\widehat{ABC}$,
– $[AC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$,
– $[BC]$ est l'**hypoténuse** du triangle rectangle.

Activité : 2 page 203.

II. Cosinus d'un angle aigu

Activité : feuille



Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu.
Si OMA et ONB sont deux triangles rectangles qui ont le même angle aigu $\widehat{xOy}$ alors

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \text{ et donc } \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB}$$

Cette valeur commune est appelée « **le cosinus de l'angle** $\widehat{xOy}$ » et se note $\cos \widehat{xOy}$.

$$\cos \widehat{xOy} = \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB}$$

Si ABC est un triangle rectangle en A alors

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{Hypoténuse du triangle rectangle } ABC}$$

Exercices : 1, 2 et 3 page 210 ; 18 page 213 ; 28 page 214.

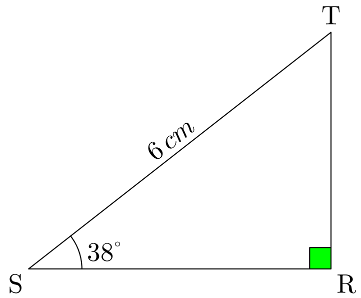
III. Applications

Pour les calculs, on utilise le mode « **degré** » de la calculatrice.
Activité : 4 page 204.
Exercice : 37 page 215.

1) Calculer une longueur

Cas n°1

Le triangle RST est rectangle en R donc



$$\cos \widehat{RST} = \frac{RS}{ST}$$

$$\frac{\boxed{\cos 38}}{1} = \frac{RS}{6}$$

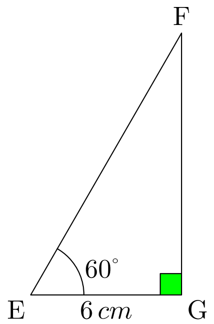
$$RS = 6 \times \boxed{\cos 38}$$

$$RS \simeq 4,73\,cm$$

Attention : On n'écrit JAMAIS de valeurs approchées avant le résultat final.

Cas n°2

Le triangle EFG est rectangle en G donc



$$\cos \widehat{EFG} = \frac{EG}{EF}$$

$$\frac{\boxed{\cos 60}}{1} = \frac{6}{EF}$$

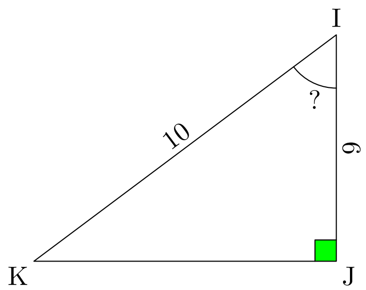
$$EF = \frac{6}{\boxed{\cos 60}}$$

$$EF = 12\,cm$$

Activité : 6 page 205.
Exercices : 8 et 9 page 211 ; 49 page 216.

2) Calculer un angle

Le triangle IJK est rectangle en J donc



$$\cos \widehat{KIJ} = \frac{IJ}{IK}$$

$$\cos \widehat{KIJ} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\widehat{KIJ} = \cos^{-1}(0,6)$$

$$\widehat{KIJ} \simeq 53^\circ$$

Activité : 9 page 206.
Exercices : 6 et 10 page 211 ; 19 et 21 page 213 ; 27 page 214 ; 44 page 216 ; 56 page 217 (en supplément, difficile).

I Vocabulaire

☐ ☐ activité 2 p 203

II Cosinus d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille
☐ ☐ 1 p 210
☐ ☐ 2 p 210
☐ ☐ 3 p 210
☐ ☐ 18 p 213
☐ ☐ 28 p 214

III Applications

☐ ☐ activité 4 p 204
☐ ☐ 37 p 215

1. Calcul de longueurs

☐ ☐ activité 6 p 204
☐ ☐ 8 p 211
☐ ☐ 9 p 211
☐ ☐ 49 p 216

2. Calcul d'angles

☐ ☐ activité 9 p 206
☐ ☐ 6 p 211
☐ ☐ 10 p 211
☐ ☐ 19 p 213
☐ ☐ 21 p 213
☐ ☐ 27 p 214
☐ ☐ 44 p 216
☐ ☐ 56 p 217

I Vocabulaire

☐ ☐ activité 2 p 203

II Cosinus d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille
☐ ☐ 1 p 210
☐ ☐ 2 p 210
☐ ☐ 3 p 210
☐ ☐ 18 p 213
☐ ☐ 28 p 214

III Applications

☐ ☐ activité 4 p 204
☐ ☐ 37 p 215

1. Calcul de longueurs

☐ ☐ activité 6 p 204
☐ ☐ 8 p 211
☐ ☐ 9 p 211
☐ ☐ 49 p 216

2. Calcul d'angles

☐ ☐ activité 9 p 206
☐ ☐ 6 p 211
☐ ☐ 10 p 211
☐ ☐ 19 p 213
☐ ☐ 21 p 213
☐ ☐ 27 p 214
☐ ☐ 44 p 216
☐ ☐ 56 p 217

I Vocabulaire

☐ ☐ activité 2 p 203

II Cosinus d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille
☐ ☐ 1 p 210
☐ ☐ 2 p 210
☐ ☐ 3 p 210
☐ ☐ 18 p 213
☐ ☐ 28 p 214

III Applications

☐ ☐ activité 4 p 204
☐ ☐ 37 p 215

1. Calcul de longueurs

☐ ☐ activité 6 p 204
☐ ☐ 8 p 211
☐ ☐ 9 p 211
☐ ☐ 49 p 216

2. Calcul d'angles

☐ ☐ activité 9 p 206
☐ ☐ 6 p 211
☐ ☐ 10 p 211
☐ ☐ 19 p 213
☐ ☐ 21 p 213
☐ ☐ 27 p 214
☐ ☐ 44 p 216
☐ ☐ 56 p 217

I Vocabulaire

☐ ☐ activité 2 p 203

II Cosinus d'un angle aigu

☐ ☐ activité feuille
☐ ☐ 1 p 210
☐ ☐ 2 p 210
☐ ☐ 3 p 210
☐ ☐ 18 p 213
☐ ☐ 28 p 214

III Applications

☐ ☐ activité 4 p 204
☐ ☐ 37 p 215

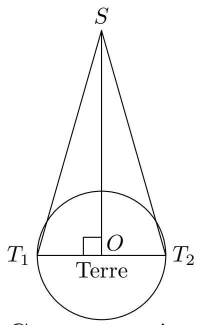
1. Calcul de longueurs

☐ ☐ activité 6 p 204
☐ ☐ 8 p 211
☐ ☐ 9 p 211
☐ ☐ 49 p 216

2. Calcul d'angles

☐ ☐ activité 9 p 206
☐ ☐ 6 p 211
☐ ☐ 10 p 211
☐ ☐ 19 p 213
☐ ☐ 21 p 213
☐ ☐ 27 p 214
☐ ☐ 44 p 216
☐ ☐ 56 p 217

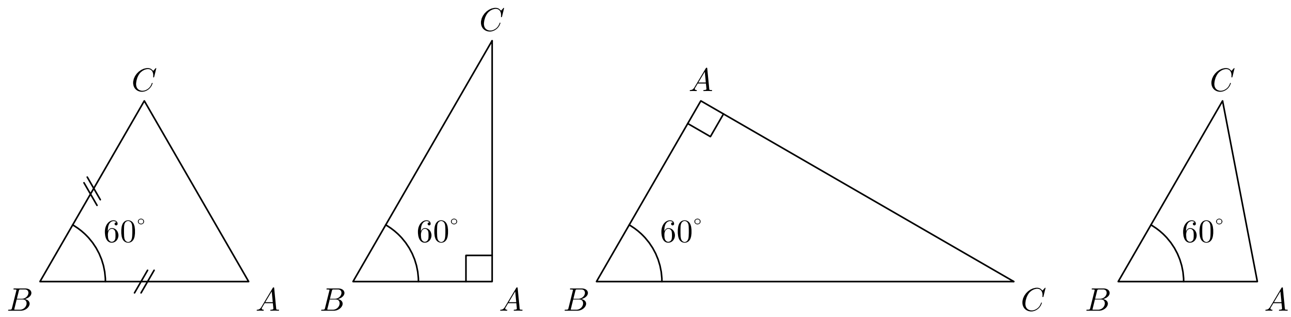
Activité 1 : Cosinus d'un angle aigu



En 260 Av J.C., Aristarque de Samos entreprit de mesurer la distance de la Terre au Soleil. Après réflexions et approximations, il aboutit à la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle).
Le point O est le centre de la Terre, le point S représente le Soleil. Les points T_1 et T_2 sont deux points particuliers à la surface de la Terre.
Il connaissait déjà le rayon de la Terre mais ne pouvant mesurer réellement les longueurs T_1S et ST_2, il mesura, à l'aide d'un télescope, les angles $\widehat{ST_1T_2}$ et $\widehat{T_1T_2S}$.

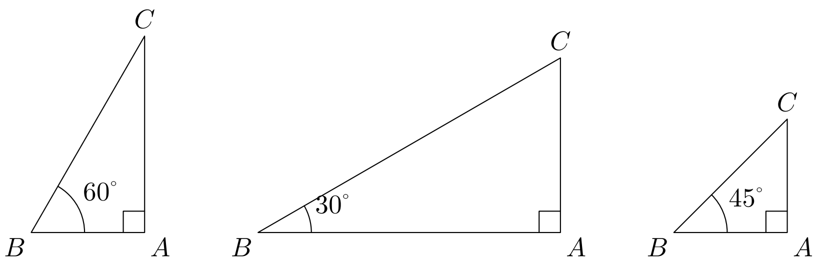
Comment, à partir de ces données, calculer la longueur SO ?

1. Dans chacun des cas suivants, mesure les longueurs BA et BC puis évalue le rapport $\dfrac{BA}{BC}$.



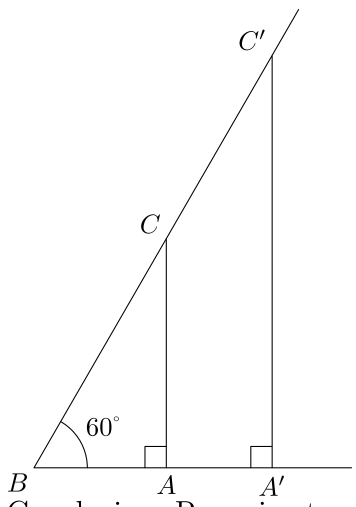
   Que remarque-t-on ?

2. Dans chacun des cas suivants, mesure les longueurs BA et BC puis évalue le rapport $\dfrac{BA}{BC}$.



   Que remarque-t-on ?

3. Sur la figure ci-dessous, on a dessiné deux triangles rectangles ABC et $A'BC'$ qui possèdent chacun un angle de 60°.



   (a) Montre que (CA) et $(C'A')$ sont parallèles.

   (b) Montre que $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$.

   (c) Puisque $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$, posons $k = \dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$.
   On obtient alors

   $$BA = k \times \ldots \qquad\qquad BC = k \times \ldots$$

   et on peut écrire

   $$\frac{BA}{BC} = \ldots\ldots$$

Conclusion :Recopie et complète :
Dans un triangle rectangle, le quotient du ...... par...... ne dépend que de...................
Ce quotient est appelé cosinus de l'angle.

Activité 2 : Encadrement du cosinus d'un angle aigu

1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer $\cos\widehat{B}$.
2. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} > 0$, en déduire que $\cos\widehat{B} > 0$.
3. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} < 1$, en déduire que $\cos\widehat{B} < 1$.
4. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\cos\widehat{B}$.
5. Recopier et compléter la phrase suivante :
   Le cosinus d'un angle aigu est compris entre ...... et ....

Activité 2 : Encadrement du cosinus d'un angle aigu

1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer $\cos\widehat{B}$.
2. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} > 0$, en déduire que $\cos\widehat{B} > 0$.
3. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} < 1$, en déduire que $\cos\widehat{B} < 1$.
4. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\cos\widehat{B}$.
5. Recopier et compléter la phrase suivante :
   Le cosinus d'un angle aigu est compris entre ...... et ....

Activité 2 : Encadrement du cosinus d'un angle aigu

1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer $\cos\widehat{B}$.
2. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} > 0$, en déduire que $\cos\widehat{B} > 0$.
3. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} < 1$, en déduire que $\cos\widehat{B} < 1$.
4. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\cos\widehat{B}$.
5. Recopier et compléter la phrase suivante :
   Le cosinus d'un angle aigu est compris entre ...... et ....

Activité 2 : Encadrement du cosinus d'un angle aigu

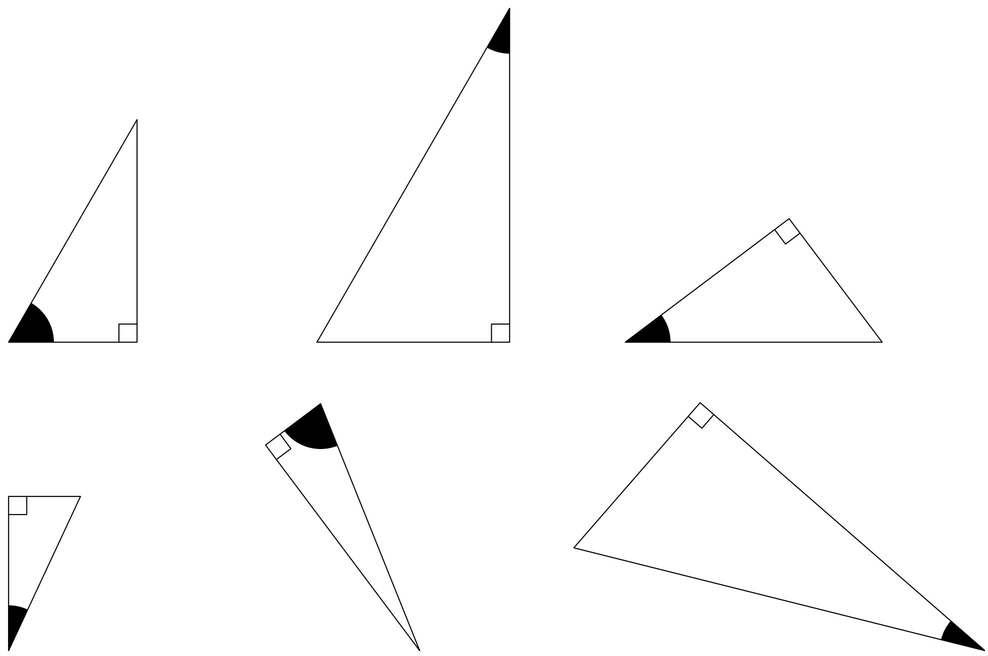
1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer $\cos\widehat{B}$.
2. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} > 0$, en déduire que $\cos\widehat{B} > 0$.
3. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} < 1$, en déduire que $\cos\widehat{B} < 1$.
4. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\cos\widehat{B}$.
5. Recopier et compléter la phrase suivante :
   Le cosinus d'un angle aigu est compris entre ...... et ....

Activité 2 : Encadrement du cosinus d'un angle aigu

1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprimer $\cos\widehat{B}$.
2. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} > 0$, en déduire que $\cos\widehat{B} > 0$.
3. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} < 1$, en déduire que $\cos\widehat{B} < 1$.
4. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\cos\widehat{B}$.
5. Recopier et compléter la phrase suivante :
   Le cosinus d'un angle aigu est compris entre ...... et ....

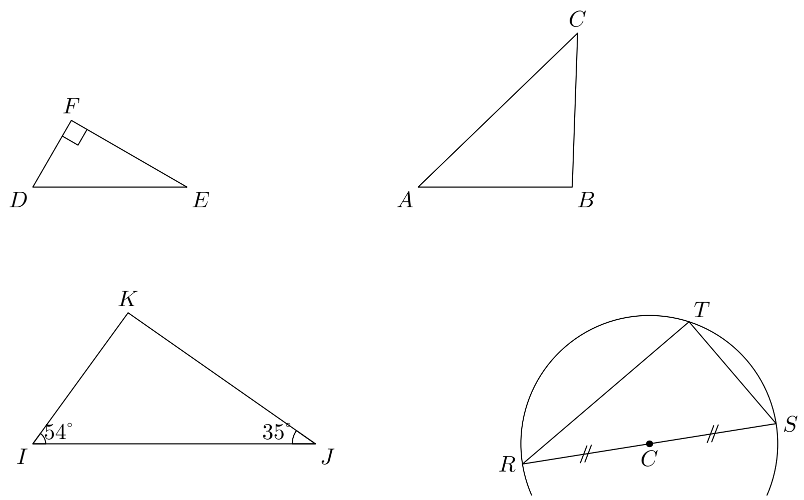
Exercice 1

Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, indique où se trouve le côté adjacent à l'angle coloré et l'hypoténuse du triangle rectangle.



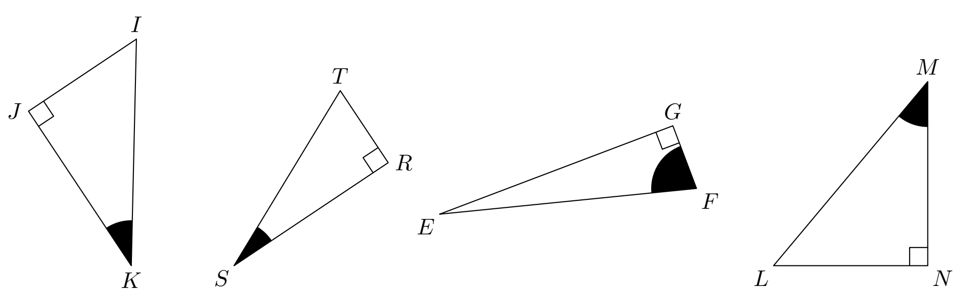
Exercice 2

Peux-tu envisager d'utiliser le cosinus dans les triangles suivants ? Justifie la réponse.

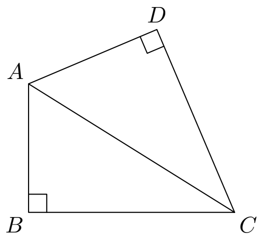


Exercice 3

Dans chaque triangle rectangle ci-dessous, écris l'expression du cosinus de l'angle coloré.



Exercice 4



Les triangles ABC et ACD ci-contre sont rectangles respectivement en B et en D.

1. Pour chacun des angles suivants, précise son côté adjacent et le triangle rectangle considéré :

   (a) $\widehat{BAC}$; (b) $\widehat{ADC}$; (c) $\widehat{ACD}$; (d) $\widehat{ACB}$.

2. Écris l'expression du cosinus de chacun de ces angles.

Exercice 5

Soit RST un triangle rectangle en R tel que $RS = 7,2\,cm$ et $ST = 9\,cm$.

1. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{RST}$. On donnera la valeur approchée au degré près.
2. Calcule la longueur TR.

Exercice 6

1. Construis un triangle RST rectangle en S tel que $RS = 4\,cm$ et $RT = 8\,cm$.
2. Calcule la longueur ST.
3. Détermine les angles de ce triangle rectangle.

Exercice 7

Dans chacun des cas, on fera la figure correspondante en vraie grandeur.

1. Soit RST un triangle rectangle en R tel que $RT = 4\,cm$ et $\widehat{RTS} = 30^\circ$.
   Calcule la longueur ST.
2. Soit IJK un triangle rectangle en K tel que $IJ = 9\,cm$ et $\widehat{IJK} = 45^\circ$.
   Calcule la longueur KJ.

Exercice 8

Sur un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10\,cm$, place un point C sur le cercle tel que l'angle $\widehat{ABC} = 50^\circ$.

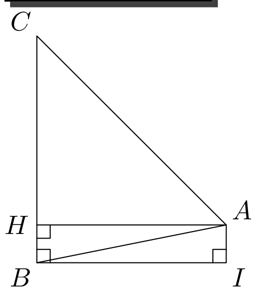
1. Montre que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule les longueurs BC et AC. (On donnera les valeurs arrondies au millimètre.)

⋆⋆

Exercice 9

Durant la tempête de Décembre 1999, un arbre s'est brisé en B. Son extrémité E est tombé à $12\,m$ des racines R en faisant un angle de 30°avec le tronc (qui est resté perpendiculaire au sol). Quelle était la hauteur de l'arbre avant la tempête ?

Exercice 10



En voyage à Paris, on veut photographier La Tour Eiffel (Voir Schéma ci-contre). Le segment $[BC]$ représente La Tour Eiffel ; l'appareil-photo est au point A.
On a les mesures suivantes :
$BC = 300\,m$, $BI = 350\,m$, $AI = 1,5\,m$.
Calcule l'angle $\widehat{BAC}$ sous lequel on voit La Tour Eiffel.

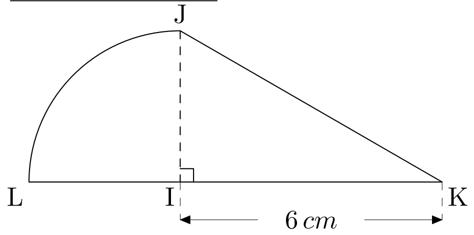
Exercice 11

Dans chacun des cas, construis un triangle EFG, rectangle en F, en respectant les indications.

1. Calcule la longueur GF sachant que $EG = 10\,cm$ et $\widehat{EGF} = 35^\circ$.

2. Calcule la longueur EG sachant que $EF = 8\,cm$ et $\widehat{EGF} = 39^{\circ}$.
3. Calcule la longueur FG sachant que $EF = 4\,cm$ et $\widehat{FEG} = 75^{\circ}$.

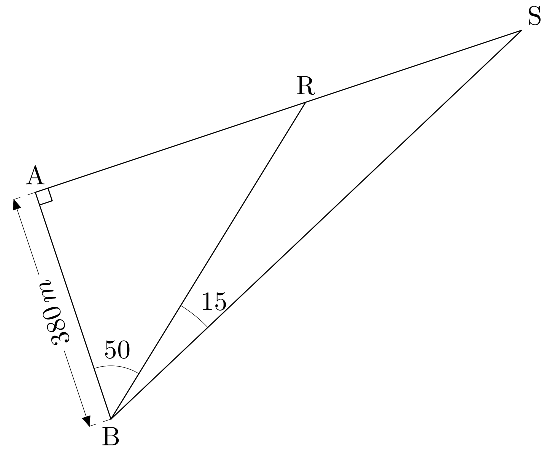
Exercice 12



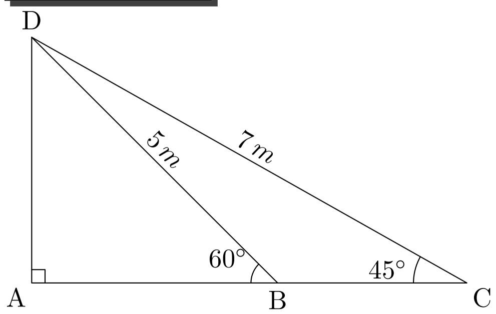
Calcule le périmètre et l'aire de la figure ci-contre qui est constitué d'un triangle rectangle et d'un quart de disque.
L'angle $\widehat{IJK}$ vaut 60°.

Exercice 13

A l'aide des indications portées sur la figure ci-dessous, calcule la longueur RS.**On indiquera correctement toutes les données nécessaires à l'utilisation d'un théorème ou d'une propriété.**



Exercice 14

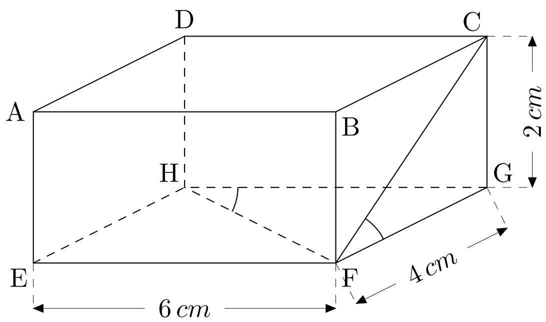


A l'aide de la figure ci-contre, calcule la longueur BC.

⋆⋆⋆

Exercice 15

La figure ci-dessous représente un pavé droit. Calcule une valeur approchée des mesures des angles $\widehat{CFG}$ et $\widehat{GHF}$.



Chapitre 12

Distance, droite et cercle

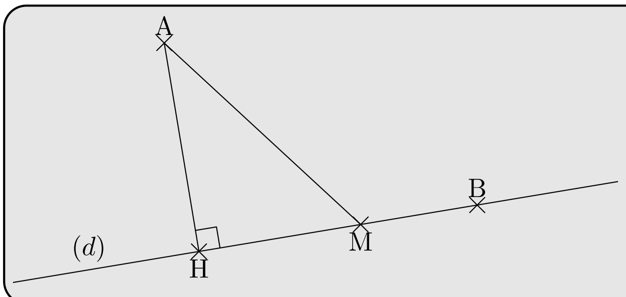
Sommaire

Programme 2004

Tangente ; distance d'un point à une droite.	Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points. Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.	Le problème d'intersection d'un cercle et d'une droite fera l'objet d'activités, sans pour autant que l'énoncé du résultat général soit une compétence exigible. L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues en classe de 5^{e}, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore.

I. Distance d'un point à une droite

<u>Activité :</u> feuille.



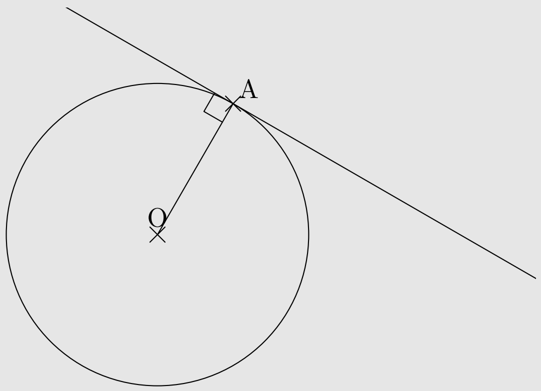
Soit (d) une droite et A un point. La perpendiculaire à la droite (d) passant par A coupe la droite (d) en H.
La longueur AH s'appelle **la distance du point A à la droite** (d).

<u>Remarques :</u>
Si M appartient à la droite (d) mais différent de H alors $AM > AH$.
Si B appartient à la droite (d) alors la distance de B à la droite (d) est nulle.

<u>Exercices :</u> 13, 14 et 16 page 166.

II. Tangente à un cercle

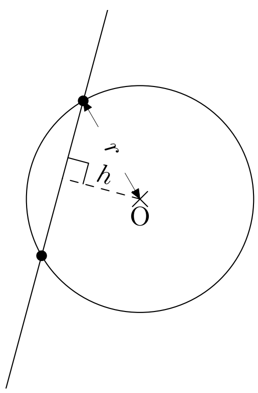
<u>Activités :</u> 8 et 9 page 160.



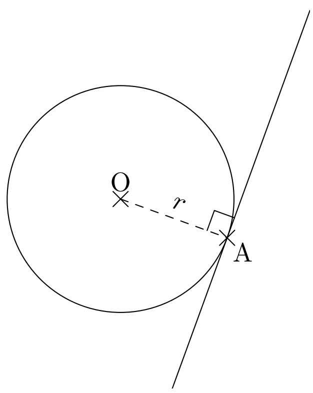
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point du cercle $\mathcal{C}$.
La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A est la droite (d) perpendiculaire en A à la droite (OA).

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, et (d) une droite quelconque. Appelons h la distance du point O à la droite (d). Alors

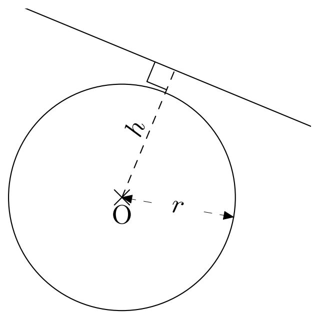
Si $h < r$ alors la droite (d) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points.



Si $h = r$ alors la droite (d) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en 1 point A : (d) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.



Si $h > r$ alors la droite (d) ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$.



<u>Exercices :</u> 17 et 18 page 166 ; 27 page 167 ; 44 page 169.

I Distance d'un point à une droite

☐ ☐ activité : feuille
☐ ☐ 13 p 166
☐ ☐ 14 p 166
☐ ☐ 16 p 166

II Tangente à un cercle

☐ ☐ activité 8 p 160
☐ ☐ activité 9 p 160
☐ ☐ 17 p 166
☐ ☐ 18 p 166
☐ ☐ 27 p 167
☐ ☐ 44 p 169

I Distance d'un point à une droite

☐ ☐ activité : feuille
☐ ☐ 13 p 166
☐ ☐ 14 p 166
☐ ☐ 16 p 166

II Tangente à un cercle

☐ ☐ activité 8 p 160
☐ ☐ activité 9 p 160
☐ ☐ 17 p 166
☐ ☐ 18 p 166
☐ ☐ 27 p 167
☐ ☐ 44 p 169

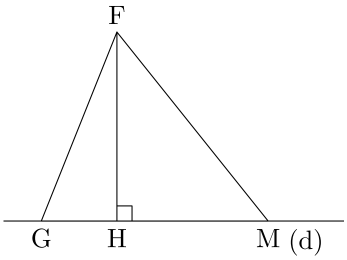
I Distance d'un point à une droite

☐ ☐ activité : feuille
☐ ☐ 13 p 166
☐ ☐ 14 p 166
☐ ☐ 16 p 166

II Tangente à un cercle

☐ ☐ activité 8 p 160
☐ ☐ activité 9 p 160
☐ ☐ 17 p 166
☐ ☐ 18 p 166
☐ ☐ 27 p 167
☐ ☐ 44 p 169

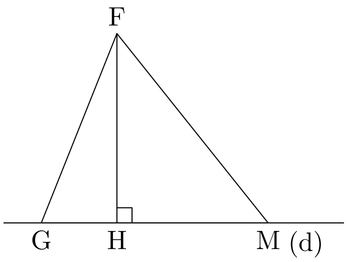
Activité : Distance d'un point à une droite



Sur la figure, trois fourmis partent du point F vers une barre de chocolat (représentée par $[GM]$), une fourmi se dirige vers G, une vers H et enfin la dernière vers M.

1. Quelle fourmi a choisi le plus court chemin ?
2. Que représente le segment $[FG]$ pour le triangle FGH ? le segment $[FM]$ pour le triangle FMH ?
3. Quelle est, sans erreur possible, la longueur la plus courte entre FG, FH et FM ?
4. Compléter :
   Le .... H est appelé le **pied de la perpendiculaire** à la .... (d) passant par le .... F.
   La longueur FH est appelée la **distance** du .... F à la .... (d).

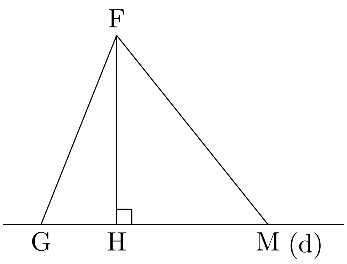
Activité : Distance d'un point à une droite



Sur la figure, trois fourmis partent du point F vers une barre de chocolat (représentée par $[GM]$), une fourmi se dirige vers G, une vers H et enfin la dernière vers M.

1. Quelle fourmi a choisi le plus court chemin ?
2. Que représente le segment $[FG]$ pour le triangle FGH ? le segment $[FM]$ pour le triangle FMH ?
3. Quelle est, sans erreur possible, la longueur la plus courte entre FG, FH et FM ?
4. Compléter :
   Le .... H est appelé le **pied de la perpendiculaire** à la .... (d) passant par le .... F.
   La longueur FH est appelée la **distance** du .... F à la .... (d).

Activité : Distance d'un point à une droite



Sur la figure, trois fourmis partent du point F vers une barre de chocolat (représentée par $[GM]$), une fourmi se dirige vers G, une vers H et enfin la dernière vers M.

1. Quelle fourmi a choisi le plus court chemin ?
2. Que représente le segment $[FG]$ pour le triangle FGH ? le segment $[FM]$ pour le triangle FMH ?
3. Quelle est, sans erreur possible, la longueur la plus courte entre FG, FH et FM ?
4. Compléter :
   Le .... H est appelé le **pied de la perpendiculaire** à la .... (d) passant par le .... F.
   La longueur FH est appelée la **distance** du .... F à la .... (d).

⋆

Exercice 1

1. Construis un triangle ABC avec $AC = 6cm$, $\widehat{BAC} = 52^\circ$, $\widehat{ACB} = 38^\circ$.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
3. Trace le cercle de centre A et de rayon AB.
4. Explique pourquoi la droite (BC) est tangente à ce cercle en B.

Exercice 2

1. (a) Trace une droite d et place un point M à $3\,cm$ de la droite d.
   (b) Peux-tu placer un autre point N situé à $3\,cm$ de la droite d ?
   (c) Trace les droites où se trouvent tous les points situés à $3\,cm$ de d.
2. Trace une droite d et marque un point A sur d. Trouve les emplacements possibles d'un point M situé à $5\,cm$ du point A et à $3\,cm$ de d. Explique ta façon de faire.

⋆⋆

Exercice 3

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O ; une droite (d) coupe ce cercle en 2 points A et B ; I est le milieu du segment $[AB]$.

1. Faire une figure.
2. Pourquoi la droite (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$?
3. En déduire que la droite (d) est la tangente au cercle de centre O et de rayon OI.

Exercice 4

On considère un point A sur une droite (d) et un point B extérieur à la droite (d). On note (d_1) la médiatrice du segment $[AB]$ et (d_2) la perpendiculaire à la droite (d) passant par A.

1. Fais une figure.
2. Les droites (d_1) et (d_2) se coupent en I et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon IB.
   Pourquoi le point A appartient-il au cercle $\mathcal{C}$?
3. Conclus que la droite (d) est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A.

⋆⋆⋆

Exercice 5

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 6\,cm$ et O le centre du cercle $(\mathcal{C})$.
Soit K un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $\widehat{AOK} = 60^\circ$. Soit C le point de la droite (AB), extérieur au segment $[AB]$, tel que $AC = 2\,cm$.

1. Quelle est la nature du triangle AOK ? Justifie la réponse.
2. La tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en B coupe la droite (CK) en E. La tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A coupe la droite (CK) en D.
   Prouve que les droites (AD) et (BE) sont parallèles.
3. Prouve que $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{1}{4}$.

Chapitre 13

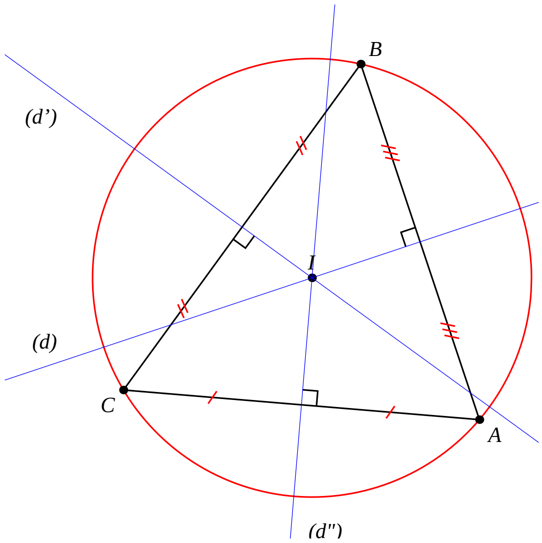
Droites remarquables du triangle

Sommaire

Programme 2004

Droites remarquables d'un triangle.	Construire les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle ; en connaître une définition et savoir qu'elles sont concourantes.	Certaines de ces propriétés de concours pourront être démontrées ; ce sera l'occasion de mettre en oeuvre les connaissances de la classe ou celles de 5^{e}. On pourra étudier la position du point de concours de la médiane sur chacune d'elles.

I. Médiatrices

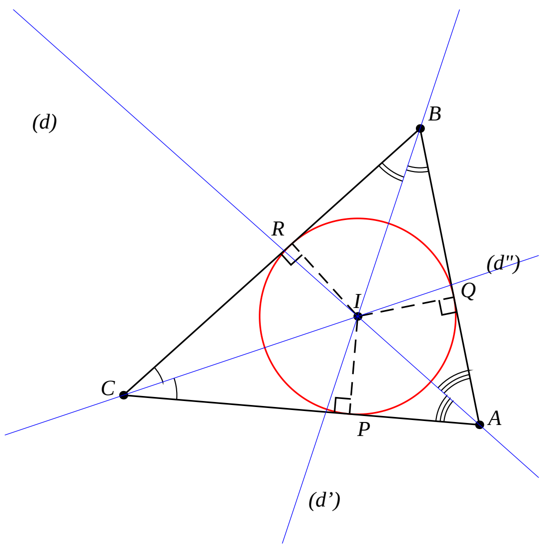


Définition :
La *médiatrice d'un segment* est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Les médiatrices dans un triangle sont donc les médiatrices des côtés de ce triangle.

Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes en un point O appelé *centre du cercle circonscrit* au triangle.

Si M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$ alors M est équidistant de A et de B c'est à dire $MA = MB$.
Si M est équidistant de A et de B alors M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

II. Bissectrices

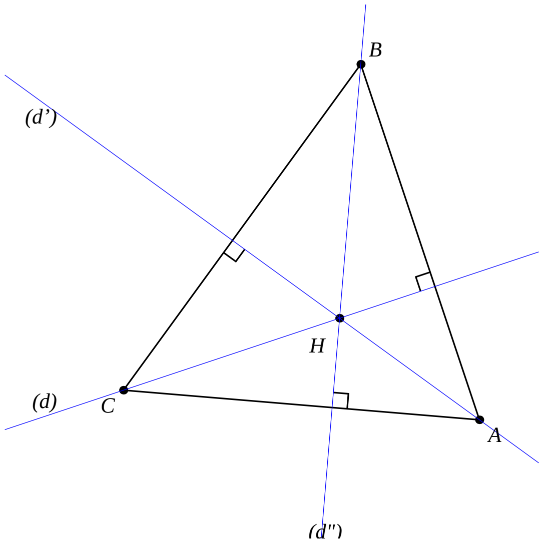


Définition
La *bissectrice d'un angle* est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure. C'est également l'axe de symétrie de cet angle.

Dans un triangle, les bissectrices sont concourantes en un point I appelé *centre du cercle inscrit* au triangle.
De plus, $IP = IQ = IR$

Si une droite passe par un sommet et l'intersection de deux bissectrices alors c'est une bissectrice de ce triangle.

III. Hauteurs



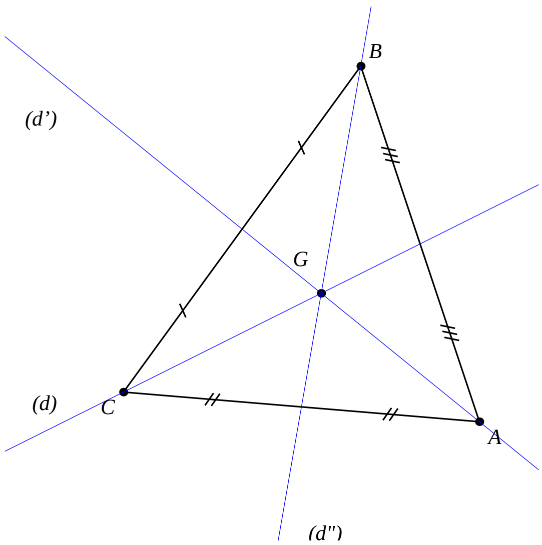
Définition :
Dans un triangle, une *hauteur* est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Notation : Dans le triangle ABC, si la hauteur passe par le sommet A on dit alors *hauteur issue de* A.

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* du triangle.

Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre d'un triangle alors elle est perpendiculaire au côté du triangle opposé à ce côté.

IV. Médianes



Définition :
Dans un triangle, une *médiane* est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point G appelé *centre de gravité* du triangle.
De plus, on a $AG = \dfrac{2}{3}AA'$, $BG = \dfrac{2}{3}BB'$, $CG = \dfrac{2}{3}CC'$

Si une droite passe par un sommet et le centre de gravité d'un triangle alors elle coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.

Exercices : 1, 2 et 9 page 195 ; 19 page 196 ; 34 page 198.

Activité : Généralités sur les médiatrices

Première partie : Conjectures

1. Ouvrir le fichier triangle.ggb.
2. Tracer les 3 médiatrices du triangle (4$^{\text{e}}$menu). Que remarque-t-on ?
3. Tracer le point d'intersection de deux médiatrices (2$^{\text{e}}$menu).
4. Tracer le cercle de centre D, passant par un des sommets (5$^{\text{e}}$menu).
5. Que remarque-t-on ? Comment s'appelle ce cercle ?

Deuxième partie : Démonstrations

1. Sur le cahier, tracer un triangle ABC tel que $AB = 7\,cm$, $AC = 8\,cm$ et $BC = 11\,cm$.
2. Tracer les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$, elles se coupent en O.
3. Montrer que $OA = OB = OC$.
   O est donc le centre du cercle .... au triangle ABC.
4. Tracer le cercle de centre O et de rayon OA.
5. Sachant que $OB = OC$, que peut-on dire de O par rapport au segment $[BC]$?
6. Que peut-on donc dire sur les trois médiatrices d'un triangle ?

Activité : Généralités sur les bissectrices

Première partie : Introduction

1. Sur le cahier, tracer deux demi-droites $[Dx)$ et $[Dy)$.
2. Tracer la bissectrice (d) de l'angle $\widehat{xDy}$.
3. Placer un point O sur (d).
4. Tracer la perpendiculaire à $[Dx)$ passant par O, elle coupe $[Dx)$ en E ; puis tracer la perpendiculaire à $[Dy)$ passant par O, elle coupe $[Dy)$ en F.
5. Que peut-on dire de OE et OF ?
6. Tracer le cercle de centre O et de rayon OE. Que remarque-t-on ?

Deuxième partie : Conjectures

1. Ouvrir le fichier bissectrice.ggb.
2. Déplacer le point D pour que le cercle soit tangent aux trois côtés du triangle.
3. Que peut-on dire de la droite (AD) par rapport à l'angle $\widehat{BAC}$?
4. Tracer les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ (4$^{\text{e}}$menu, cliquer sur les sommets dans l'ordre du nom du sommet).
5. Où est placé D ?
6. Que peut-on dire des trois bissectrices ?

Troisième partie : Démonstrations

1. Tracer le triangle DEF tel que $DE = 8\,cm$, $DF = 9\,cm$ et $EF = 10\,cm$.
2. Tracer les bissectrices des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DFE}$. Elles se coupent en O.
3. Tracer les droites perpendiculaires aux côtés du triangle passant par O, elles coupent $[DE]$ en I, $[DF]$ en J et $[EF]$ en K.
4. En ne considérant que l'angle $\widehat{DEF}$, que peut-on dire de OI et OK ?
5. De même, en ne considérant que l'angle $\widehat{EFD}$, que peut-on dire de OJ et OK ?
6. À partir des deux questions précédentes, que peut-on dire de OI et OJ ?
7. Que peut-on conclure pour O par rapport à $\widehat{FDE}$?
8. Que peut-on donc dire sur les trois bissectrices d'un triangle ?
9. Tracer le cercle de centre O de rayon OI. Que remarque-t-on ?

★

Exercice 1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. (a) Construis un triangle ECG tel que $EC = 7\,cm$, $CG = 6\,cm$, et $GE = 3\,cm$.
   (b) Construis la hauteur (d) issue de G dans le triangle ECG.
   (c) Construis la hauteur (d') issue de E dans le triangle ECG.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
2. (a) Construis un triangle ERL tel que $ER = 6\,cm$, $RL = 5\,cm$ et $\widehat{ERL} = 60^\circ$.
   (b) Construis la médiane (d) issue de R dans le triangle ERL.
   (c) Construis la médiane (d') issue de L dans le triangle ERL.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
3. (a) Contruis un triangle SER tel que $SE = 6\,cm$, $\widehat{RSE} = 50^\circ$, $\widehat{RES} = 60^\circ$.
   (b) Construis son cercle inscrit

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 10\,cm$, $BC = 11\,cm$ et $CA = 12\,cm$.

1. Construis l'orthocentre H du triangle ABC.
2. (a) Soit I le point d'intersection des droites (AH) et (BC) ; J le point d'intersection des droites (BH) et (CA) ; K le point d'intersection des droites (CH) et (AB).
   Construis le centre du cercle inscrit au triangle IJK.
   (b) Que constate-t-on ?

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

1. (a) Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifie.
   (b) Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifie.
2. Démontre que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

★★

Exercice 4

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10cm$ et M un point du segment $[AB]$ tel que $BM = 3\,cm$. Soit R un point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $BR = 7\,cm$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AR) en S.
Démontre que les droites (AL) et (SB) sont perpendiculaires.

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en A. Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe la droite (BC) en H. Le point I est le milieu du segment $[HB]$ et le point J est le milieu du segment $[AH]$.

1. Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. Prouve que les droites (IJ) et (AC) sont perpendiculaires.
3. Déduis-en que les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

Exercice 6

1. Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construis le symétrique L du point A par rapport au point M.

2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifie la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire du point J ? Pourquoi ?

Exercice 7

Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $EDFC$? Justifie.
   (b) Démontre que la droite (DC) est à la fois une médiane du triangle ABC et du triangle EFD.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontre que G est aussi le centre de gravité du triangle EFD.

Exercice 8

Construis un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
Soit E le symétrique de B par rapport à C. La droite (EO) coupe la droite (CD) en F. Soit G le point d'intersection des droites (BF) et (ED).

1. Quel est le centre de gravité du triangle BDE ? Justifie la réponse.
2. Déduis-en que G est le milieu du segment $[ED]$.

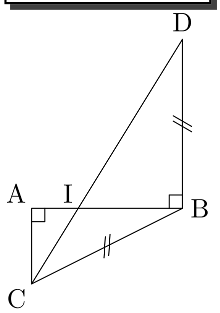
⋆⋆⋆

Exercice 9

Trace un triangle ART tel que $AR = 4,5\,cm$, $RT = 5,3\,cm$ et $AT = 2,8\,cm$.
Place le point L, symétrique de T par rapport à A.

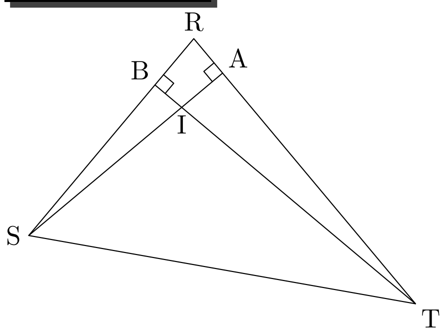
1. Quelle est la nature du triangle ART ?
2. Quelle est la nature du triangle LTR ?
3. Trace la médiane issue de T dans le triangle LTR. Elle coupe le segment $[AR]$ en F. Calcule la longueur AF.
4. Place le point M, symétrique de F par rapport à A. Quelle est la nature du quadrilatère $LFTM$?
5. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $LFTM$ et l'aire $\mathcal{B}$ du quadrilatère $LMTR$. Vérifie que $\mathcal{A} = \dfrac{\mathcal{B}}{2}$.

Exercice 10



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A. Les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires et $BC = BD$.
Démontrer que la demi-droite $[CD)$ est une bissectrice du triangle ABC.

Exercice 11



On considère la figure ci-contre dans lequel $[TB]$ et $[SA]$ sont deux hauteurs sécantes en I. On donne de plus $SR = 6,8\,cm$; $BR = 2,8\,cm$; $ST = 10,4\,cm$.

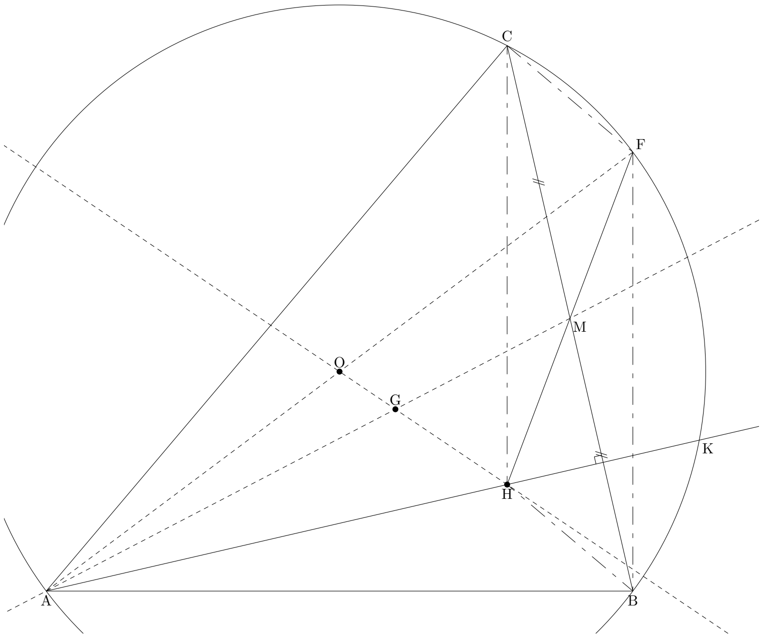
1. (a) Que représente le point I pour le triangle RST ? Justifie la réponse.

(b) Déduis-en que les droites (RI) et (ST) sont perpendiculaires.

2. Calcule les longueurs SB ; BT ; RT.
3. Soit D le centre de gravité du triangle SAT.
   (a) Place le point D sur la figure ci-dessus et appelle J le milieu du segment $[ST]$.
   (b) Justifie l'égalité $AJ = SJ$.
   (c) Déduis-en la longueur AD.

CERCLE D'EULER[1]

1) Introduction



Construction

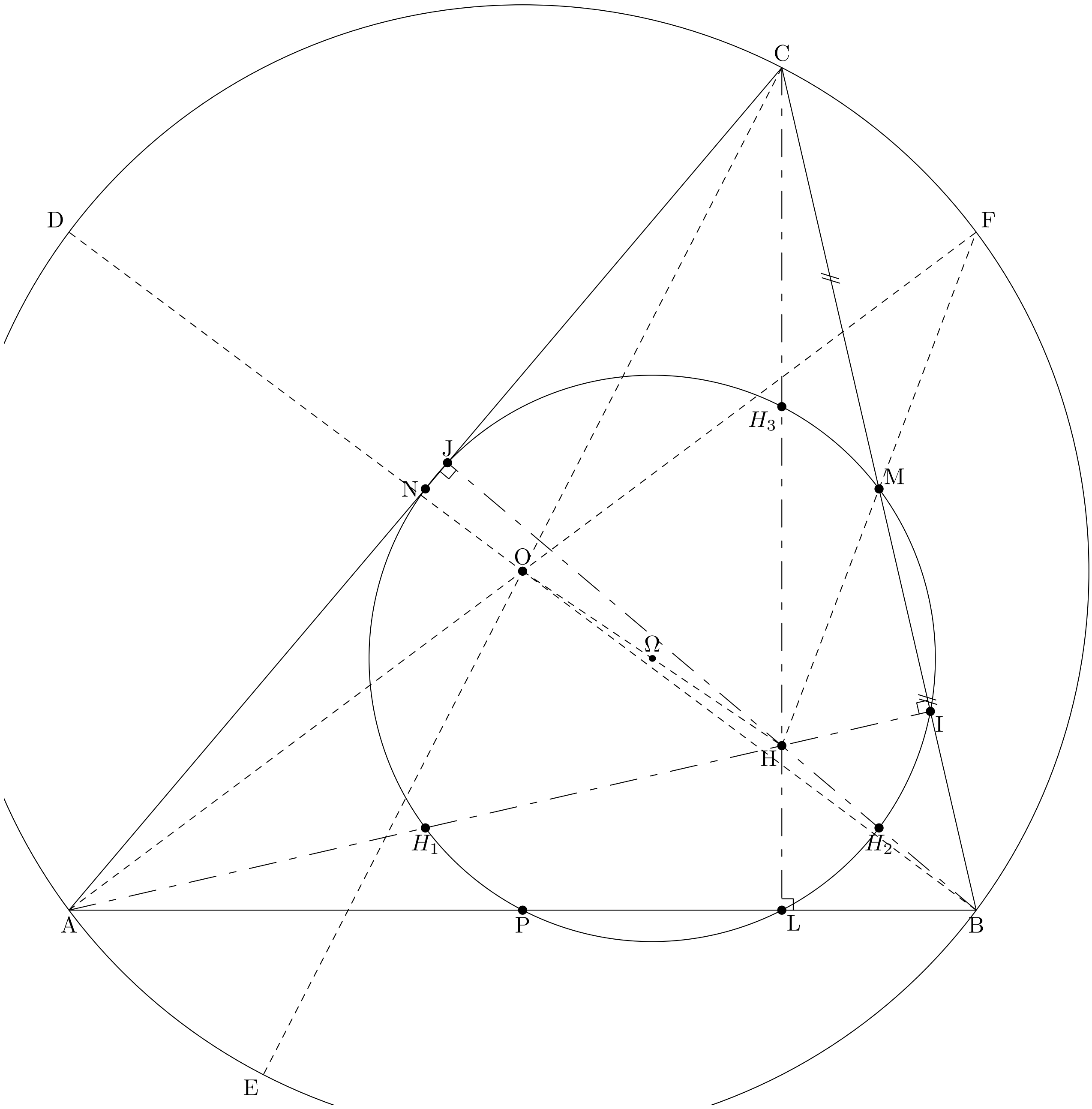
1. Soit ABC un triangle supposé non équilatéral.
2. Soit O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3. Soit F le point diamétralement opposé à A.
4. Soit K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle $(\mathcal{C})$
5. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
6. Soit H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
7. Soit G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

Démonstration

1. Montre que les triangles AFK et AFC sont rectangles.
2. (a) Montre que la droite (OM) est la médiatrice du segment $[BC]$.
   (b) Montre que les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
3. (a) Montre que M est le milieu du segment $[HF]$.
   (b) Montre que le quadrilatère $BHCF$ est un parallélogramme.
4. (a) Montre que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
   (b) Montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. (a) Montre que G est le centre de gravité du triangle AHF.
   (b) Quelle est la position remarquable de G sur le segment $[OH]$?
   (c) Montre que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

[1]Leonhard EULER, Mathématicien suisse (1707-1783)

2) Cercle d'Euler ou cercle des neuf points



Construction

1. On reprend la construction précédente.
2. On appelle Ω le milieu du segment $[OH]$; N et P les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$; D et E le symétriques respectifs de B et C par rapport à O ; I, J, L les points d'intersection respectifs entres la hauteur issue de A et la droite (BC), la hauteur issue de B et la droite (AC), la hauteur issue de C et la droite (AB) ; H_1, H_2, H_3 les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

Démonstration

Démontre que les points M, N, P, I, J, L, H_1, H_2 et H_3 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Indication</u> : *On cherchera par expérimentation quel pourrait être le centre de ce cercle et on déterminera ensuite la valeur du rayon à l'aide d'un des points.*
Restera ensuite à prouver que tous les autres points donnent la même valeur du rayon.
Chose « simple » pour les points M, N, P, H_1, H_2, H_3. Pour le point I, on pourra considérer la parallèle à la droite (AH) passant par Ω et démontrer qu'elle coupe le segment $[IM]$ en son milieu.

Chapitre 14

Géométrie dans l'espace

Sommaire

Programme 2004

Pyramide et cône de révolution	Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = Bh/3$.	L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la fabrication de patrons. Ces travaux permettront de consolider les images mentales relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité. La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut être une activité de mise en oeuvre de la proportionnalité. On pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.

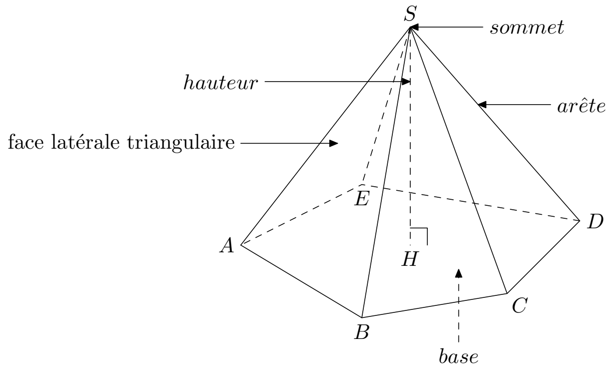
I. Pyramide

1) Pyramide de sommet S

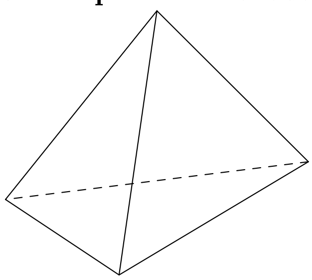
<u>Activité :</u> 2 page 237.

Une pyramide est un solide dont :
– une face est un polygone appelé **la base** ;
– toutes les autres faces sont des **triangles** qui ont un sommet commun n'appartenant pas à la base : c'est le **sommet** de la pyramide.
(Ces faces sont appelées **faces latérales**.)

La droite qui passe par le sommet de la pyramide et qui est perpendiculaire à la base est appelée **hauteur** de la pyramide.
La longueur SH est aussi appelée hauteur de la pyramide.



Remarques : Il ne faut pas confondre la hauteur de la pyramide et une hauteur d'une face.


Pyramide à base triangulaire

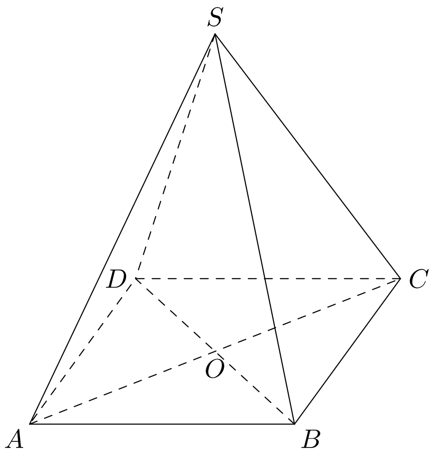
Cas particuliers : Une pyramide dont la base est un triangle est un **tétraèdre**. Toutes les faces sont donc des triangles donc toutes les faces peuvent être considérées comme des bases.

<u>Exercices :</u> 1, 2 et 4 page 245.

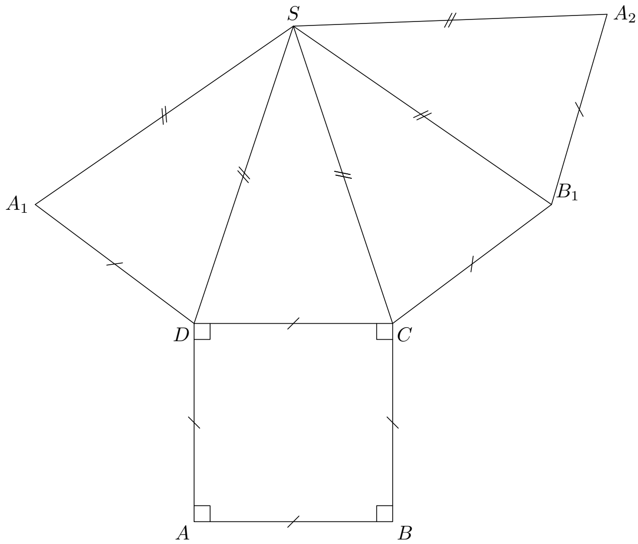
2) Pyramides régulières

Une pyramide de sommet S est dite **régulière** lorsque :
– sa base est un polygone régulier de centre O : triangle équilatéral, carré ...
– $[SO]$ est la hauteur de la pyramide.

▌ Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.



ABCD est un carré de centre O



En découpant et en pliant, A, A_1, A_2 coïncident, ainsi que B et B_1.

3) Un patron de la pyramide.

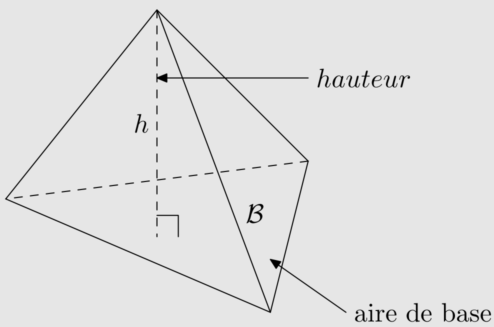
Activités : 4 et 5 page 238.

4) Volume d'une pyramide

Activité : feuille 1.

Si une pyramide a une base $\mathcal{B}$ d'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ et une hauteur h alors son volume $\mathcal{V}$ est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\mathcal{B}} \times h$$



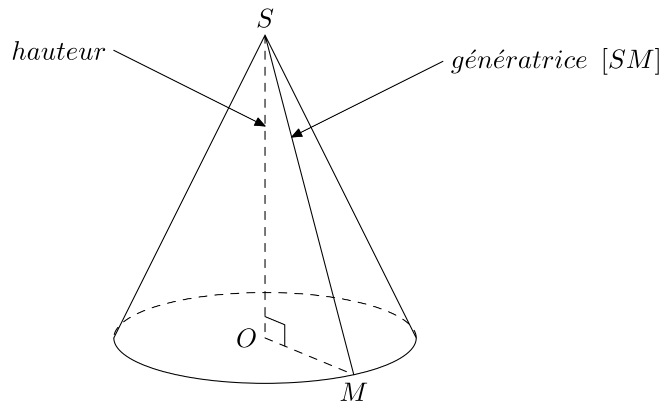
Activité : 7 page 239.
Exercices : 38 page 249 ; 8 page 245 ; 37 page 250 et 16 page 246.

II. Cône de révolution

1) Définition d'un cône

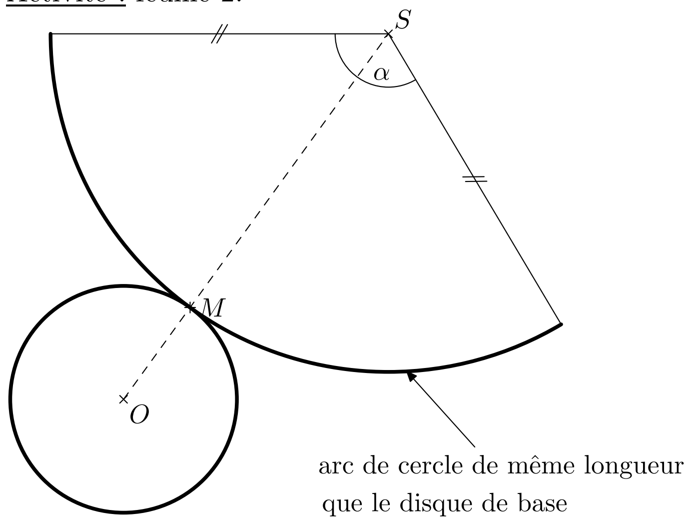
Un cône de révolution de sommet S est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O, autour de la droite (SO).
Le disque de centre O et de rayon OM est la base de ce cône.

La hauteur de ce cône est le segment $[SO]$ (la hauteur désigne aussi la longueur SO).
Le segment $[SO]$ est perpendiculaire au plan de la base.



2) Patron d'un cône

Activité : feuille 2.



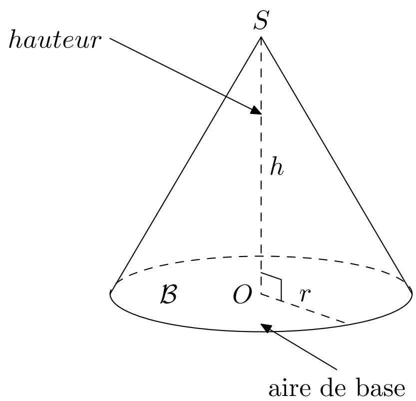
Le patron d'un cône a la forme ci-dessus ; la longueur de l'arc de cercle doit être égale au périmètre du cercle de base.
Il y a **proportionnalité** entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc correspondant.

Exercices : 35 page 249 ; 47 page 251.

3) Volume d'un cône

Si un cône a pour base un disque de rayon r et a pour hauteur h alors son volume $\mathcal{V}$ est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

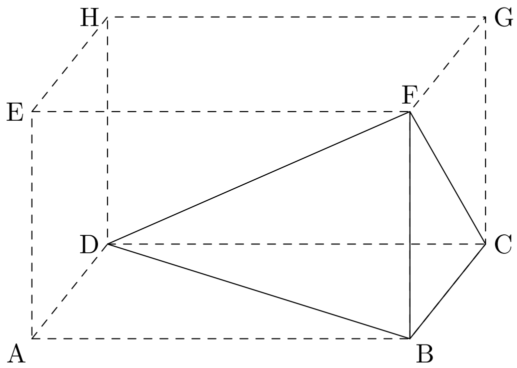


Exercices : 9 et 12 page 246 ; 38 page 250 ; 52 page 252.

III. Calcul de longueur dans l'espace

Il est important de savoir reconnaître les figures particulières (carrés, rectangles, triangles rectangles...) dans des figures de l'espace. Cela nous amène souvent à calculer des longueurs en utilisant très souvent le théorème de Pythagore, parfois l'égalité des 3 rapports et les formules de trigonométrie (cosinus).

Exemple :



$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 5\,cm$, $AD = 3\,cm$ et $AE = 4\,cm$.

1. Calculer BD.
2. Calculer CF.
3. Calculer DF.
4. Quelle est la nature du triangle CFD ?
5. Calculer $\widehat{BDC}$.

Exercices : 13 page 246 ; 44 page 250 ; 49 page 251.

I Pyramide

1. Pyramide de sommet S

☐ ☐ activité 2 p 237
☐ ☐ 1 p 245
☐ ☐ 2 p 245
☐ ☐ 4 p 245

3. Patron de pyramide

☐ ☐ activité 4 p 238
☐ ☐ activité 5 p 238

4. Volume de pyramide

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ activité 7 p 237
☐ ☐ 38 p 249
☐ ☐ 8 p 245
☐ ☐ 37 p 250
☐ ☐ 16 p 246

II Cône de révolution

2. Patron de cône

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ 35 p 249
☐ ☐ 47 p 251

2. Volume du cône

☐ ☐ 9 p 246
☐ ☐ 12 p 246
☐ ☐ 38 p 250
☐ ☐ 52 p 252

III Cône de révolution

☐ ☐ 13 p 246
☐ ☐ 44 p 250
☐ ☐ 49 p 251

I Pyramide

1. Pyramide de sommet S

☐ ☐ activité 2 p 237
☐ ☐ 1 p 245
☐ ☐ 2 p 245
☐ ☐ 4 p 245

3. Patron de pyramide

☐ ☐ activité 4 p 238
☐ ☐ activité 5 p 238

4. Volume de pyramide

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ activité 7 p 237
☐ ☐ 38 p 249
☐ ☐ 8 p 245
☐ ☐ 37 p 250
☐ ☐ 16 p 246

II Cône de révolution

2. Patron de cône

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ 35 p 249
☐ ☐ 47 p 251

2. Volume du cône

☐ ☐ 9 p 246
☐ ☐ 12 p 246
☐ ☐ 38 p 250
☐ ☐ 52 p 252

III Cône de révolution

☐ ☐ 13 p 246
☐ ☐ 44 p 250
☐ ☐ 49 p 251

I Pyramide

1. Pyramide de sommet S

☐ ☐ activité 2 p 237
☐ ☐ 1 p 245
☐ ☐ 2 p 245
☐ ☐ 4 p 245

3. Patron de pyramide

☐ ☐ activité 4 p 238
☐ ☐ activité 5 p 238

4. Volume de pyramide

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ activité 7 p 237
☐ ☐ 38 p 249
☐ ☐ 8 p 245
☐ ☐ 37 p 250
☐ ☐ 16 p 246

II Cône de révolution

2. Patron de cône

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ 35 p 249
☐ ☐ 47 p 251

2. Volume du cône

☐ ☐ 9 p 246
☐ ☐ 12 p 246
☐ ☐ 38 p 250
☐ ☐ 52 p 252

III Cône de révolution

☐ ☐ 13 p 246
☐ ☐ 44 p 250
☐ ☐ 49 p 251

I Pyramide

1. Pyramide de sommet S

☐ ☐ activité 2 p 237
☐ ☐ 1 p 245
☐ ☐ 2 p 245
☐ ☐ 4 p 245

3. Patron de pyramide

☐ ☐ activité 4 p 238
☐ ☐ activité 5 p 238

4. Volume de pyramide

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ activité 7 p 237
☐ ☐ 38 p 249
☐ ☐ 8 p 245
☐ ☐ 37 p 250
☐ ☐ 16 p 246

II Cône de révolution

2. Patron de cône

☐ ☐ activité : feuille 1
☐ ☐ 35 p 249
☐ ☐ 47 p 251

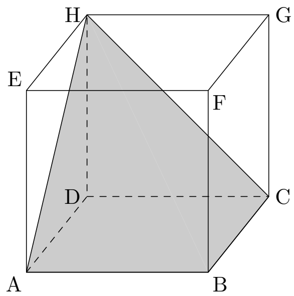
2. Volume du cône

☐ ☐ 9 p 246
☐ ☐ 12 p 246
☐ ☐ 38 p 250
☐ ☐ 52 p 252

III Cône de révolution

☐ ☐ 13 p 246
☐ ☐ 44 p 250
☐ ☐ 49 p 251

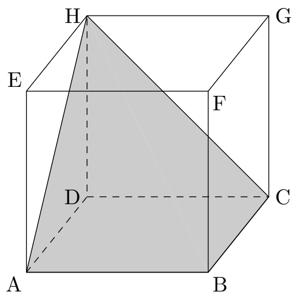
Activité : Volume d'une pyramide



À partir d'un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes $5\,cm$, on obtient la pyramide $ABCDH$.

1. (a) Calculer l'aire de la base de la pyramide.
   (b) Quelle est la hauteur de la pyramide ?
2. Découper le patron et construire la pyramide. Utiliser 3 pyramides pour reconstruire le cube.
3. En déduire que le volume de cette pyramide est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times (AB \times BC) \times DH$.

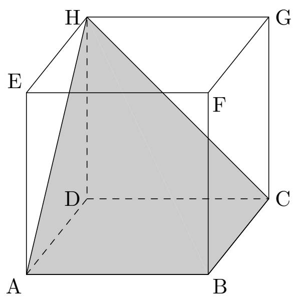
Activité : Volume d'une pyramide



À partir d'un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes $5\,cm$, on obtient la pyramide $ABCDH$.

1. (a) Calculer l'aire de la base de la pyramide.
   (b) Quelle est la hauteur de la pyramide ?
2. Découper le patron et construire la pyramide. Utiliser 3 pyramides pour reconstruire le cube.
3. En déduire que le volume de cette pyramide est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times (AB \times BC) \times DH$.

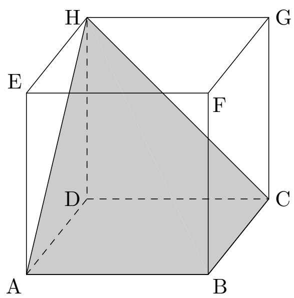
Activité : Volume d'une pyramide



À partir d'un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes $5\,cm$, on obtient la pyramide $ABCDH$.

1. (a) Calculer l'aire de la base de la pyramide.
   (b) Quelle est la hauteur de la pyramide ?
2. Découper le patron et construire la pyramide. Utiliser 3 pyramides pour reconstruire le cube.
3. En déduire que le volume de cette pyramide est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times (AB \times BC) \times DH$.

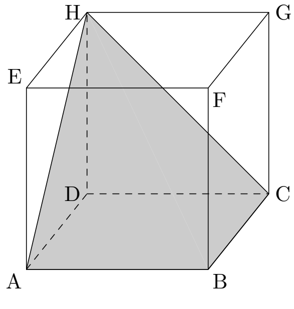
Activité : Volume d'une pyramide



À partir d'un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes $5\,cm$, on obtient la pyramide $ABCDH$.

1. (a) Calculer l'aire de la base de la pyramide.
   (b) Quelle est la hauteur de la pyramide ?
2. Découper le patron et construire la pyramide. Utiliser 3 pyramides pour reconstruire le cube.
3. En déduire que le volume de cette pyramide est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times (AB \times BC) \times DH$.

Activité : Volume d'une pyramide



À partir d'un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes $5\,cm$, on obtient la pyramide $ABCDH$.

1. (a) Calculer l'aire de la base de la pyramide.
   (b) Quelle est la hauteur de la pyramide ?
2. Découper le patron et construire la pyramide. Utiliser 3 pyramides pour reconstruire le cube.
3. En déduire que le volume de cette pyramide est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times (AB \times BC) \times DH$.

Activité : Patron d'un cône

On veut construire le patron d'un cône dont la génératrice mesure $10\,cm$ et le rayon de base mesure $4\,cm$.

1. Calculer le périmètre exact de la base du cône.
2. Quelle est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ correspondant à la surface conique ?
3. En se rappelant qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc de cercle correspondant, calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en s'aidant du tableau :

	Arc $\widehat{AB}$	Cercle de centre O et de rayon OA
Mesure de l'angle en $^\circ$	$\widehat{AOB}$	360
Longueur en cm		

4. Tracer le patron du cône.

Activité : Patron d'un cône

On veut construire le patron d'un cône dont la génératrice mesure $10\,cm$ et le rayon de base mesure $4\,cm$.

1. Calculer le périmètre exact de la base du cône.
2. Quelle est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ correspondant à la surface conique ?
3. En se rappelant qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc de cercle correspondant, calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en s'aidant du tableau :

	Arc $\widehat{AB}$	Cercle de centre O et de rayon OA
Mesure de l'angle en $^\circ$	$\widehat{AOB}$	360
Longueur en cm		

4. Tracer le patron du cône.

Activité : Patron d'un cône

On veut construire le patron d'un cône dont la génératrice mesure $10\,cm$ et le rayon de base mesure $4\,cm$.

1. Calculer le périmètre exact de la base du cône.
2. Quelle est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ correspondant à la surface conique ?
3. En se rappelant qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc de cercle correspondant, calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en s'aidant du tableau :

	Arc $\widehat{AB}$	Cercle de centre O et de rayon OA
Mesure de l'angle en $^\circ$	$\widehat{AOB}$	360
Longueur en cm		

4. Tracer le patron du cône.

Activité : Patron d'un cône

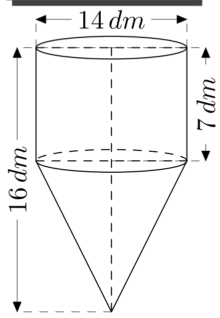
On veut construire le patron d'un cône dont la génératrice mesure $10\,cm$ et le rayon de base mesure $4\,cm$.

1. Calculer le périmètre exact de la base du cône.
2. Quelle est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ correspondant à la surface conique ?
3. En se rappelant qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc de cercle correspondant, calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en s'aidant du tableau :

	Arc $\widehat{AB}$	Cercle de centre O et de rayon OA
Mesure de l'angle en $^\circ$	$\widehat{AOB}$	360
Longueur en cm		

4. Tracer le patron du cône.

Exercice 1

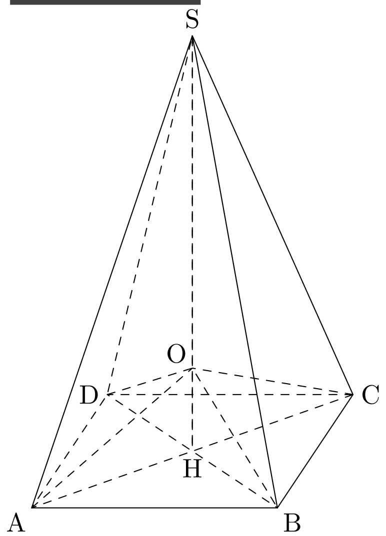


Un réservoir d'eau est constitué d'une partie cylindrique et d'une partie conique.

1/ Donne la valeur exacte du volume de ce réservoir.

2/ Ce réservoir peut-il contenir $1\,000\,l$? Si oui, à quelle hauteur par rapport au sommet du cône arrivera l'eau ?

Exercice 2



On considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée. On note $[SH]$ sa hauteur et on donne $AH = 12\,cm$ et $AS = 20\,cm$.

1/ Calcule la longueur SH.

2/ Calcule l'angle $\widehat{SAH}$.

3/ Montre que la longueur AB est égale à $\sqrt{288}\,cm$.

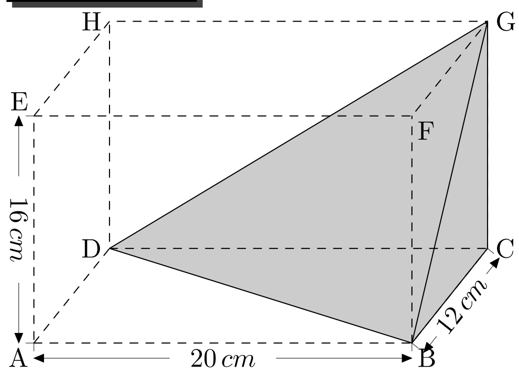
4/ Calcule le volume de la pyramide $SABCD$.

5/ Construis le patron de la pyramide $SABCD$ à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.

6/ Soit O le point du segment $[SH]$ tel que $SO = 6\,cm$. On crée ainsi une deuxième pyramide régulière à base carrée.

Calcule le volume de la partie comprise entre les deux pyramides $SABCD$ et $OABCD$.

Exercice 3



Partie 1 On dispose d'un pavé droit. On extrait de ce pavé droit une pyramide $\mathcal{P}_1$ comme l'indique la figure ci-contre.

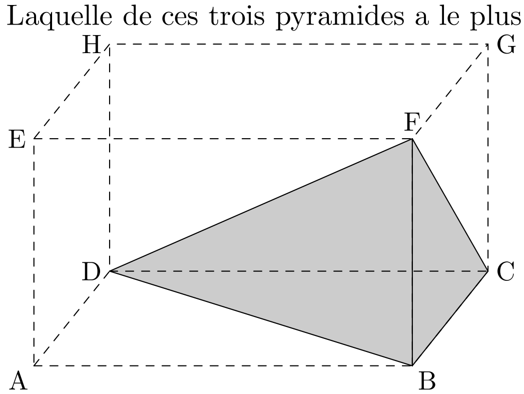
1/ Calcule la longueur DB.

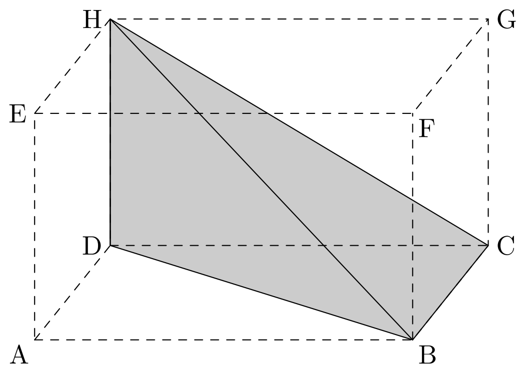
2/ Calcule une mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{CDG}$.

3/ Construis un patron de la pyramide $BDCG$ à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.

4/ Calcule le volume de la pyramide $BDCG$. Convertis le résultat en litre.

Partie 2 De deux pavés droits identiques au précédent, on extrait deux nouvelles pyramides $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Laquelle de ces trois pyramides a le plus petit volume ?





Ordre

Sommaire

Programme 2004

Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Applications.	Comparer deux nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire. Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme $a + b$ et $a + c$ sont rangés dans le même ordre que b et c. Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif. Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, racine carrée...).	À partir d'une interprétation graphique, on introduira le critère relatif au signe de la différence. Aucune connaissance n'est exigible lorsque a est négatif, mais ce cas sera évoqué pour montrer la nécessité de la condition $a > 0$ dans l'énoncé de la propriété envisagée.

I. Vocabulaire

Lorsque deux quantités sont inégales, cela se traduit mathématiquement par *une inégalité*.

$$\underbrace{\text{expression A}}_{1^{\text{er}}\text{ membre}} < \underbrace{\text{expression B}}_{2^{\text{e}}\text{ membre}}$$

Soit deux nombres relatifs a et b. Dire que :
- $a > b$ signifie que $a - b > 0$;
- $a < b$ signifie que $a - b < 0$.

II. Ordre et addition

Si on ajoute (ou on soustrait) le même nombre aux 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \qquad \text{Si } a \geqslant b \text{ alors } a - d \geqslant b - d$$

Exemple :

$$\begin{array}{rcl} & 2 \text{ cahiers } + 2 \text{ livres } \leqslant 1 \text{ cahier } + 15€ & \\ -1 \text{ cahier} & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & -1 \text{ cahier} \\ & 1 \text{ cahier } + 2 \text{ livres } \leqslant 15€ & \end{array}$$

III. Ordre et multiplication

Si on multiplie (ou on divise) par un nombre **strictement positif** les 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ et } c > 0 \text{ alors } a \times c < b \times c$$

Exemples :

$$\begin{array}{rcl} & \pi < 4 & \\ \times 2 & \downarrow & \times 2 \\ & 2 \times \pi < 2 \times 4 & \\ & 2\pi < 8 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \pi > 3 \\ \\ 2 \times \pi > 2 \times 3 \\ 2\pi > 6 \end{array}$$

Attention à ne pas multiplier par un nombre négatif. $3 > 2$ mais $-4 \times 3 = 12$, $-4 \times 2 = -8$ et $-12 \not> -8$.

IV. Comparer des nombres

Définition :
Comparer deux nombres, c'est dire si l'un est plus grand ou plus petit que l'autre ou si les deux nombres sont égaux.

Pour cela, on utilise les signes $>$, $<$, $\leqslant$ (plus petit ou égal) et $\geqslant$ (plus grand ou égal).

Méthode : Pour comparer des nombres, on peut utiliser le signe de leur différence.

1. Avec la calculatrice :
   Comparer $\dfrac{25}{11}$ et $\sqrt{5}$.

$\frac{25}{11} - \sqrt{5} \approx 0,0366\ldots > 0$
Donc $\frac{25}{11} - \sqrt{5} > 0$ et donc $\frac{25}{11} > \sqrt{5}$.

2. Sans la calculatrice :
   Comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{5}$.
   $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{7 \times 5} - \frac{2 \times 7}{5 \times 7} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35} > 0$
   Donc $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$.

Exemples :

1. Avec la calculatrice :
   Comparer π et $\frac{355}{113}$.
   Comparer $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $1,619$.
   Comparer $\sqrt{3}$ et $1,719$.

2. Sans la calculatrice :
   Comparer $\frac{13}{11}$ et $\frac{15}{13}$.
   Comparer $\frac{120}{11}$ et 11.

V. Encadrement

1) Troncature et arrondis de $\sqrt{7}$

Pour la valeur $\sqrt{7}$, la calculatrice affiche : 2,645751311...

	Troncature de $\sqrt{7}$	Arrondis de $\sqrt{7}$
À l'unité	2	3
Au dixième	2,6	2,6
Au centième	2,64	2,65
Au millième	2,645	2,646

2) Encadrement de $\sqrt{7}$

À l'unité	$2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3$
Au dixième	$2{,}6 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2{,}6$
Au centième	$2{,}64 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2{,}65$
Au millième	$2{,}645 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2{,}646$

Application :
Sachant que $3 > x > 2$:

1. encadrer $2x$;
2. encadrer $x + 7$;
3. encadrer $3x + 1$.

Exemple 1 :
Sachant que $-1 < t < 2$:

1. encadrer $3t$;
2. encadrer $t - 4$;
3. encadrer $2t - 4$.

Exemple 2 :

1. Sachant que $-6 < 2x < 4$, encadrer x.
2. Sachant que $-8 < t + 7 < 12$, encadrer t.
3. Sachant que $-7 < 2a + 3 < 15$, encadrer a.

$\star$

Exercice 1

On sait que $m < p$. Compléte, si possible, par $<$ ou $>$.

1/ $m+5 \ldots p+5$

2/ $m+12 \ldots p+12$

3/ $m-12 \ldots p-10$

4/ $p-7 \ldots m-7$

5/ $m+15 \ldots p+17$

6/ $m+6 \ldots p+5$

Exercice 2

On sait que $s > t$. Complète par $<$ ou $>$.

1/ $4s \ldots 4t$

2/ $0,5t \ldots 0,5s$

3/ $\dfrac{s}{3} \ldots \dfrac{t}{3}$

4/ $3t \ldots 3s$

Exercice 3

On sait que $x < y$. Complète par $<$ ou $>$.

1/ $3x \ldots 3y$

2/ $x-5 \ldots y-5$

3/ $3x+7 \ldots 3x+7$

4/ $4x+15 \ldots 4y+15$

5/ $2x+10 \ldots 2y+12$

Exercice 4

Recopie et complète :
- Si $x-4 < 5$ alors $x < \ldots$
- Si $x+4 < 5$ alors $x < \ldots$
- Si $x-4 < -5$ alors $x < \ldots$
- Si $x+4 < -5$ alors $x < \ldots$

Exercice 5

Un nombre vérifie $0,74 < x < 0,75$.
Trouve un encadrement pour chacun des nombres suivants.

1/ $x+1$ **2/** $x-1$ **3/** $3x$ **4/** $3x+4$ **5/** $2x-3$

$\star\star$

Exercice 6

On veut poser de la moquette sur un sol rectangulaire. On mesure la longueur L et la largeur l (en m) :

$$L = 4,21 \text{ et } l = 3,75$$

Cependant, on a pu se tromper de $2\,cm$ en plus ou en moins sur la longueur.
Trouve un encadrement de l'aire de la pièce.

Exercice 7

La mesure du rayon d'un disque est de $3,5\,cm$. Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$, trouve un encadrement au centième du périmètre et de l'aire de ce cercle.

$\star\star\star$

Exercice 8

Fabrice et Claire se demandent quelle est la longueur L de leur salle de classe, mais pour la mesurer ils ne disposent que de leurs pieds comme « instrument ».

Fabrice, dont le pied mesure $26\,cm$, a réussi à le reporter 29 fois, mais pas 30.
Claire, dont le pied mesure $24\,cm$, a réussi à le reporter 31 fois, mais pas 32.
Quel encadrement de L ont-ils trouvé ?

Exercice 9

On donne $1,1 < x < 1,2$ et $3,5 < y < 3,6$.
Trouve un encadrement de $x + y$ et xy.

Translations

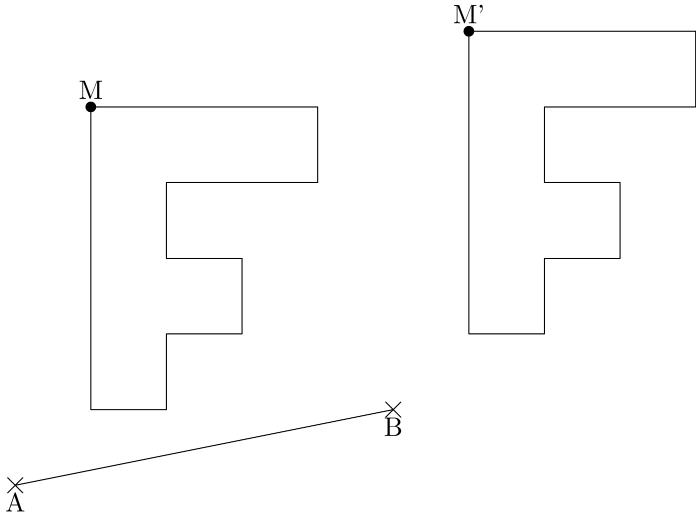
Sommaire

Programme 2004

Translation.	Étant donnés deux points A et B, sachant qu'une translation transforme A en B, construire : - l'image d'un point, appartenant ou non à la droite (AB), - l'image d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.	Les vecteurs seront abordés en 3^{e}et leur étude sera reliée à celle des translations à l'occasion de la composition de ces dernières. Diverses approches expérimentales, par exemple sur des frises ou des pavages, pourront introduire la notion de translation. La translation est définie à partir du parallélogramme. Elle pourra donner lieu à des manipulations, notamment sur des quadrillages. On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations. Définition et propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices très simples de construction.

I. Définitions

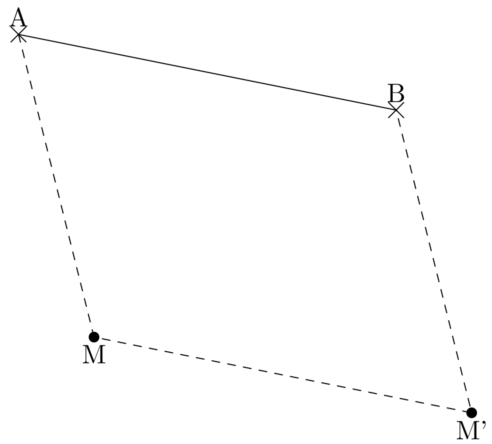
Le *glissement rectiligne* qui permet de déplacer la figure $\mathcal{F}$ du point A au point B s'appelle ***la translation qui transforme** A **en** B*.



<u>Si</u> la translation qui transforme A en B transforme M en M', on dit que M' est le **translaté** de M par la translation qui transforme A en B. On dit également que M' est **l'image** de M par la translation qui transforme A en B.

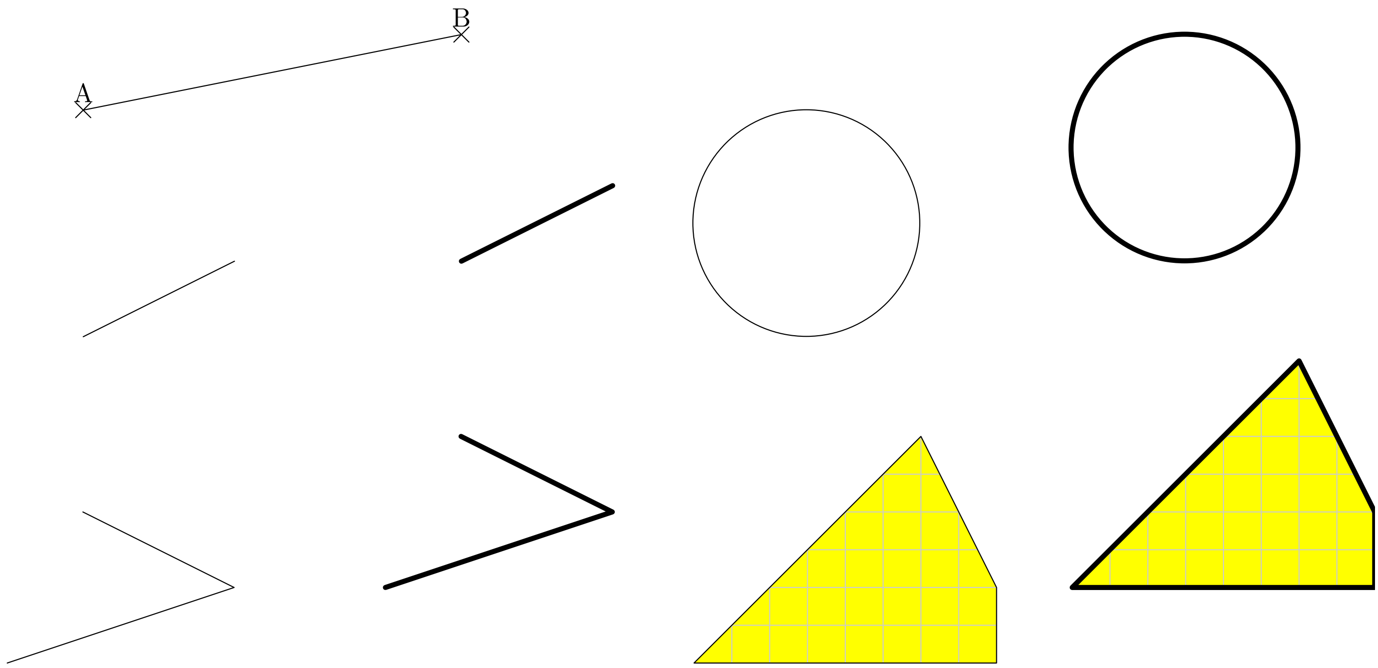
II. Propriétés

Dire que M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.

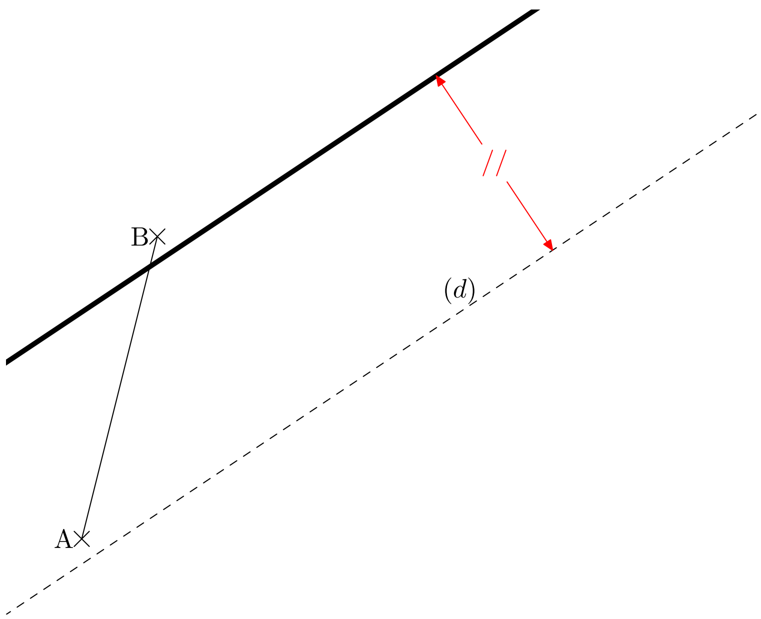


Par une translation :

– l'image d'un segment est un segment de même longueur.
– L'image d'un angle est un angle de même mesure.
  <u>Cas particulier</u> : L'image de deux droites perpendiculaires est deux droites perpendiculaires.
– L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
– L'image d'une figure est une figure de même aire.



L'image d'une droite (d) par une translation est une droite parallèle à la droite (d).



Exercice 1

Construis un rectangle, une droite (d) qui coupe le rectangle en deux points (un sur la longueur, un sur la largeur) et A et B deux points distincts situés à l'extérieur du rectangle. Trace

1. en vert, l'image du rectangle par la translation qui transforme A en B.
2. en bleu, l'image du rectangle par la symétrie d'axe (d).
3. en rouge, l'image du rectangle pat la symétrie de centre A.

Exercice 2

1. Trace un rectangle $EFGH$ dont la longueur mesure le double de la largeur.
2. Trace les axes de symétries de ce rectangle : ils coupent $[EF]$ et $[HG]$ respectivement en C et D.
3. Trace les diagonales $[FH]$ et $[EG]$: elles se coupent en O.
4. Trace, en rouge, l'image du triangle EOH par la translation qui transforme F en G.
5. Trace, en vert, l'image du triangle FOG par la translation qui transforme D en O.
6. Quelle est l'image du segment $[FD]$ par la translation qui transforme D en C ?
7. Quelle est l'image de la droite (EF) par la translation qui transforme E en D ?
8. Quelle est l'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon CE par la translation qui transforme E en F ?

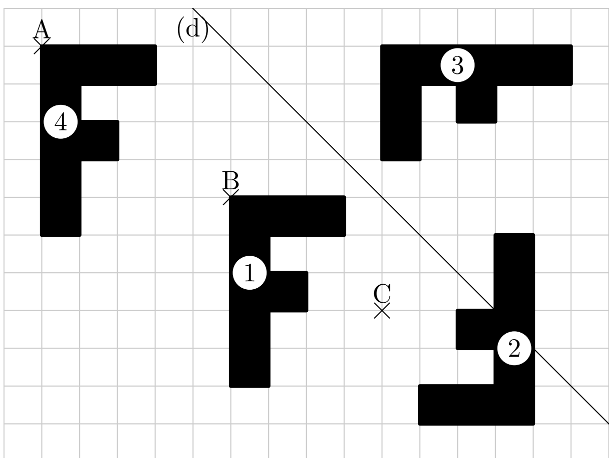
Exercice 3

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AD]$ et $[BC]$ et $ABJD$ est un parallélogramme.
B est le milieu du segment $[AP]$ et $APHD$ est un parallélogramme.
L est l'image de C par la translation qui transforme D en J.

1. Fais une figure.
2. Quelle est l'image de B par la translation qui transforme A en B ?
   Quel point a pour image J par la même translation ?
3. D se translate en H : quelle est l'image de A par cette translation ?
   C est le translaté de D : quel point a pour image L par cette translation ?
4. Trouve des points qui se correspondent dans la trnaslation qui transforme H en L.

Exercice 4

On dispose du document suivant :



En utilisant des transformations dont on précisera tous les éléments caractéristiques, recopie et complète les phrases suivantes :
– La figure 2 est l'image de la figure 1 par ....
– La figure 3 est l'image de la figure 1 par ....
– La figure 4 est l'image de la figure 1 par ....

⋆⋆

Exercice 5

On effectuera la figure sur une feuille blanche sans quadrillage.

Soit A et B deux points distincts et (MN) une droite non parallèle à la droite (AB).

1. Construis les points M' et N', images respectives des points M et N, par la translation qui transforme A en B.
2. (a) Pourquoi $ABM'M$ est un parallélogramme ?
   Soit I son centre. Précise sa position.
   (b) Pourquoi $ABN'N$ est un parallélogramme ?
   Soit J son centre. Précise sa position.
   (c) Déduis-en que les droites (MM') et (NN') sont parallèles.
3. (a) Prouve que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
   (b) Prouve que les droites (IJ) et $(M'N')$ sont parallèles.
   (c) Déduis-en que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.
4. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $MM'N'N$? Justifie la réponse.
   Par quelle translation, N' est-il l'image de N ? Justifie la réponse.
   (b) Prouve que $MN = M'N'$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC = 3\,cm$ et A' un point extérieur au triangle ABC.

1. (a) Calcule les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
   (b) Calcule l'aire du triangle ABC.
2. (a) Construis les images B', C' respectives des points B et C par la translation qui transforme A en A'.
   (b) En justifiant les réponses :
   – quelles sont les longueurs des segments $[A'C']$ et $[A'B']$?
   – quelles sont les mesures des angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{A'B'C'}$?
   – Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$?

Exercice 7

On fera la figure sur feuille blanche.

Soit un triangle ABC tel que $AB = 5\,cm$, $AC = 7\,cm$ et $BC = 9\,cm$.

1. On considère la translation t_1 qui transforme B en C. Construis l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par t_1.
2. Que remarque-t-on ? Prouve-le.
3. On considère la translation t_2 qui transforme B en A. Construis l'image $A_2B_2C_2$ du triangle ABC par t_2.
4. Que remarque-t-on ? Prouve-le.
5. Montre que $ABCA_1$ et ACC_1A_1 sont des parallélogrammes. Déduis-en que $C_2 = A_1$.
6. Montre que C est le milieu du segment $[BC_1$ et que A est le milieu du segment $[A_2B]$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5\,cm$, $AC = 6\,cm$ et $BC = 7\,cm$.

1. Construis les points M et N images respectives des points A et B par la symétrie de centre C.
2. Démontre que $ABMN$ est un parallélogramme. Quelle est l'image de N par la translation qui transforme A en B ?
3. Construis le point K, image de C par la translation qui transforme A en B. Démontre que le quadrilatère $NMKC$ est un parallélogramme.

⋆⋆⋆

Exercice 9

$ABCD$ est un rectangle, M un point du plan tel que M n'appartienne pas à la droite (AB).

1. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par C coupe la droite (AM) en C', La perpendiculaire à la droite (BM) passant par D coupe la droite (BM) en D', La perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AB) en M'.
   Vérifie que les droites (MM'), (CC'), (DD') sont concourantes.
2. *Les questions suivantes ont pour but d'établir ce résultat.*
   Soit t la translation qui transforme C en B. Quelle est l'image de la droite (MM') par la translation t ?
   Montre que l'image (Δ') de la droite (CC') par la translation t est la hauteur issue de B dans le triangle ABM. Montrer de même que l'image (Δ'') de la droite (DD') par la translation t est la hauteur issue de A dans le triangle ABM.
   Déduis-en que les droites (MM'), (Δ') et (Δ'') sont concourantes.
3. Soit t' la translation qui transforme B en C. Détermine l'image par t' des droites (MM'), de (Δ') et de (Δ'').
   Déduis-en que les droites (MM'), (CC') et (DD') sont concourantes.

Chapitre 17

Statistiques

Sommaire

Programme 2004

Effectifs cumulés, fréquences cumulées.	Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.	
Moyennes pondérées.	Calculer la moyenne d'une série statistique. Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.	L'élève sera confronté à des situations courantes où la méthode de calcul est à remettre en cause : par exemple, les différences constatées entre la moyenne annuelle des notes d'un élève calculée à partir de l'ensemble des notes de l'année ou à partir de la moyenne des moyennes trimestrielles.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs.		Les tableurs-grapheurs, utilisés dès la 5^{e}en technologie, introduisent une nouvelle manière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans un tableau. Cette nouveauté est un enrichissement pour des utilisations dont on pourra donner des exemples. Pour les graphiques des choix successifs sont proposés, ils conduisent naturellement à examiner leur pertinence pour l'illustration d'une situation donnée.

I. Effectifs et fréquences

Dans un tableau statistique, l'**effectif** est le nombre de réponses associées à chaque valeur.
L'ensemble des valeurs et des effectifs forme une **série statistique**.
En divisant l'effectif d'une valeur par l'effectif total, on obtient la **fréquence**.

$$f = \frac{\text{valeur de l'effectif}}{\text{valeur de l'effectif total}}$$

Exemple : La standardiste d'une radio FM a noté le nombre d'appels téléphoniques reçus par tranches d'heures au cours d'une matinée. Elle obtient les résultats suivants :

Tranches horaires	9h-10h	10h-11h	11h-12h	12h-13h	**Total**
Effectifs (nombres d'appels)	19	37	46	28	**130**
Fréquences	$\frac{19}{130}$				**1**
Fréquences en %	14,6				**100**

II. Effectifs et fréquences cumulés

Lorsque les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant, on obtient **l'effectif cumulé croissant** d'une valeur en additionnant son effectif à ceux qui le précèdent (on additionne à partir de la gauche du tableau).
De la même manière, les **fréquences cumulées croissantes** s'obtiennent en divisant l'effectif cumulé croissant par l'effectif total.

Remarque : les effectifs cumulés croissants indiquent quel est l'effectif de la série dont la valeur est inférieure à une valeur donnée.
Exemple : On reprend l'exemple précédent :

Tranches horaires	9h-10h	10h-11h	11h-12h	12h-13h
Effectifs (nombres d'appels)	19	37	46	28
Effectifs **cumulés croissants**	**19**	19 + 37 = **56**	19 + 37 + 46 = **102**	**Total des appels : 130**

III. Moyenne

La **moyenne** d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total de cette série :

$$\text{moyenne} = \frac{\text{Somme de toutes les valeurs}}{\text{Effectif total de la série}}$$

Exemple : Dans une usine, sept employés calculent le salaire moyen (en €) des salaires de leur atelier.

$$\frac{760 + 825 + 915 + 990 + 1065 + 1160 + 1296}{7} \approx 1002$$

Le salaire moyen des employés de cet atelier s'élève environ à 1002 €.

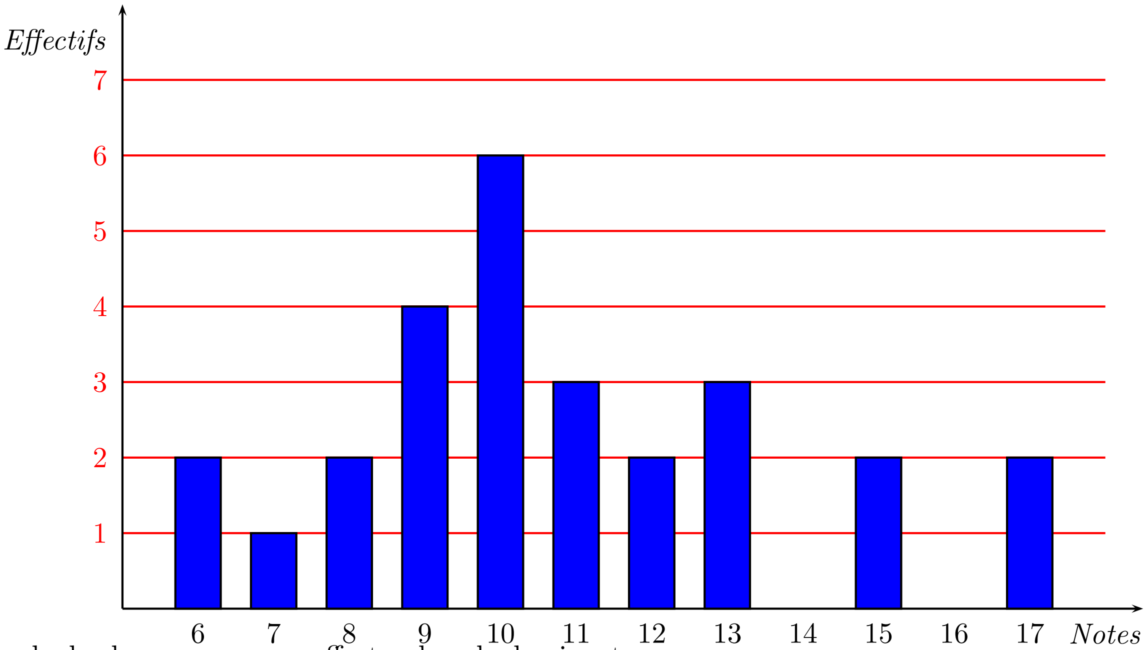
IV. Moyenne pondérée

La **moyenne pondérée** d'une série statistique est le quotient de la somme des valeurs, affectées chacune de leur coefficient, par la somme totale des coefficients.

Exemple : Dans une classe de 28 élèves, les notes à un devoir se répartissent de la manière suivante :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17
Effectifs	2	1	2	4	6	3	3	3	2	2

Nous représentons cette série par un diagramme en barres.



Pour calculer la moyenne, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{6\times 2+7\times 1+8\times 2+9\times 4+10\times 6+11\times 3+12\times 3+13\times 3+15\times 2+17\times 2}{2+1+2+4+6+3+3+3+2+2}=\frac{303}{28}\approx 10,8$$

V. Répartition en classes et moyenne

Il arrive dans certains cas qu'une série statistique soit répartie en classes, c'est-à-dire que l'on prend des intervalles de valeurs :

Exemple : Le tableau ci-dessous présente la répartition de 2000 adultes suivant leur taille :

Tailles en *cm*	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 195[
Effectifs	48	397	913	642

Il est impossible a priori de calculer la moyenne de cette série puisqu'on ne connaît pas les valeurs des tailles et leurs effectifs. On considère alors que la valeur au centre de la classe va représenter la classe. On calcule alors la moyenne pondérée pour obtenir une valeur approchée de la moyenne de la série.

Tailles en *cm*	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 195[
Centre de la classe	145	155	165	182,5
Effectifs	48	397	913	642

Pour calculer la taille moyenne, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{145\times 48+155\times 397+165\times 913+145\times 642}{2000}\approx 168$$

La taille moyenne de ce groupe d'adultes est d'environ 168 cm.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de 4^{e} selon le nombre de livres empruntés au C.D.I. durant un mois.

Nombre de livres	0	1	2	3	4	5
Effectifs	37	27	39	18	10	4
Fréquences en % (arrondies au dixième)						
Angles arrondis au degré entier						

1. Combien y-a-t-il d'élèves en 4^{e} dans ce collège ?
2. (a) Combien d'élèves empruntent au moins 3 livres ?
   (b) Combien d'élèves empruntent moins de 2 livres ?
3. Complète la ligne des fréquences.
4. Construis le diagramme circulaire des fréquences. On complétera la ligne des angles du tableau et on prendra $4\,cm$ pour le rayon du cercle.

Exercice 2

On considère le tableau de répartition des tailles pour un échantillon de 1000 hommes et de 1000 femmes adultes (source I.N.S.E.E.).

Taille en cm	**Hommes**	**Femmes**
$140 \leqslant t < 150$	10	38
$150 \leqslant t < 160$	36	360
$160 \leqslant t < 170$	383	531
$170 \leqslant t < 195$	571	71

Dans cet échantillon,

1. Quel est le nombre total d'adultes de taille strictement inférieure à $170\,cm$?
2. Quel est le nombre de femmes dont la taille est supérieure ou égale à $160\,cm$?
3. Quel est le pourcentage des femmes que représentent les femmes dont la taille est comprise entre $170\,cm$ et $195\,cm$?
4. Quel est le pourcentage des adultes que représentent les hommes dont la taille est strictement inférieure à $160\,cm$?

Exercice 3

Pour être vendues, les pommes doivent être calibrées : elles sont réparties en caisses suivant leur diamètre. Dans un lot de pommes, un producteur a évalué le nombre de pommes pour chacun des six calibres rencontrés dans le lot. On a pu ainsi contruire le tableau ci-dessous.

Calibre (en mm)	**Effectif**
$[55;60[$	12
$[60;65[$	21
$[65;70[$	29
$[70;75[$	22
$[75;80[$	25
$[80;85[$	19

1. Calcule l'effectif total de ce lot de pommes.
2. Combien de pommes ont un diamètre de moins de $70\,mm$?
3. Combien de pommes ont un diamètre d'au moins $75\,mm$?
4. Calcule, par rapport, à l'effectif total, le pourcentage de pommes dont le diamètre d est tel que $70 \leqslant d < 80$. (On arrondira le résultat à 10^{-1} près.)

Exercice 4

Voici la répartition des ménages français en fonction du nombre de personnes au foyer.

Nombre de personnes	1	2	3	4	Plus de 5	Total
Effectif en milliers	6 753	7 354	3 885	3 284	1 850	23 126

Source : I.N.S.E.E

1. Calcule la fréquence de chaque effectif : on donnera la réponse en pourcentage arrondi au dixième près.
2. Construis un diagramme circulaire qui réprésente cette situation (on choisira un rayon de $4\,cm$).

Exercice 5

Nombre de films regardés	Effectifs
0	50
1	60
2	120
3	40
4	50
5	30
6	
7	20
8	10

Le gérant d'un cinéma a réalisé un sondage auprès de 400 personnes leur demandant combien de films ils ont regardé dans les salles pendant le mois qui vient de s'écouler. Les résultats ont été indiqués dans le tableau ci-contre.

1. Complète le tableau.
2. Quel est le pourcentage de personnes qui ont regardé un seul film le mois dernier ?
3. Combien de personnes ont regardé moins de 4 films le mois dernier ? Exprime ensuite ce résultat en pourcentage.

Annexe A

Interrogations

Interrogation n° 1

4^{e} 14 Septembre 2006

Nom :

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$A = (-8) + 5 \times (-3)$

$B = (-3 - 8) \times 7 + 4$

$C = 7 - 2 \times (4 - 9)$

$D = -32 - (4 - 20) \times 2$

$E = 3 \times 11 - 10 \times (-2)$

Interrogation n° 1

4^{e} 14 Septembre 2006

Nom :

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$A = (-7) + 5 \times (-4)$

$B = (-5 - 8) \times 6 + 4$

$C = 7 - 2 \times (5 - 9)$

$D = -30 - (4 - 22) \times 2$

$E = 3 \times 13 - 10 \times (-2)$

Interrogation n°2

Nom : 26 Septembre 2006

Exercice 1 :
Le triangle ABC est rectangle en A. On sait que $AB = 5\,cm$, $AC = 12\,cm$.
Calculer BC.

Exercice 2 :
Le triangle DEF est rectangle en D. On sait que $EF = 20\,cm$, $DE = 12\,cm$.
Calculer DF.

Interrogation n°2

Nom : 26 Septembre 2006

Exercice 1 :
Le triangle ABC est rectangle en A. On sait que $AB = 6\,cm$, $AC = 8\,cm$.
Calculer BC.

Exercice 2 :
Le triangle DEF est rectangle en D. On sait que $EF = 26\,cm$, $DE = 24\,cm$.
Calculer DF.

Annexe B

Devoirs surveillés

Contrôle n°1

4^e 20 Septembre 2006

Exercice 1 :

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$A = -42 - (7-20) \times 2$ $B = 3 \times 12 - 10 \times (-2)$

$C = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-1)$ $D = \left[36 \div (-9) + 2\right] \times 5 - 2$

$E = (-14) \div (-7) + (-3) \div 5$ $F = \left[8 \times (-5) + 8\right] \div 4$

$G = \left(-4 \times 5 + 2\right) \div \left((-10) \div (-5) + 7\right)$ $H = 11 + 2 \times \left[(-3) + (-7) \times 3\right]$

$P = \dfrac{5 + 2(3 - 2 \times 8)}{-28 \div 4}$ $Q = \dfrac{-8 - 7 \times 3 - 1}{-5 \times 2}$

Exercice 2 :

Calcule les expressions données en utilisant les valeurs $a = -11$; $b = 5$; $c = -2$.

$L = a - bc$ $M = (a-b)c$ $N = 2a - (3b + 5c)$

Exercice 3 :

1. (a) Jérémy a multiplié la somme de -7 et de 3 par -6. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $-7 + 3 \times (-6)$ $(-7+3) \times (-6)$ $(3-7) \times (-6)$

   (b) Jérémy a ensuite multiplié la somme de -8 et de 3 par 6. Quel nombre Jérémy a-t-il calculé ?
2. (a) Eva a ajouté 6 au produit de -5 par 4. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $-5 + 4 \times 6$ $((-5) \times 4) + 6$ $4 \times (-5) + 6$

   (b) Eva a ensuite fait la somme du produit de -6 par 4 et de 5. Quel nombre Eva a-t-elle calculé ?

Exercice 4 :

Donne le signe des 2 produits suivants. Justifie la réponse.

$$I = 3,1 \times 4,2 \times (-1,2) \times (-1,3) \times 4,7 \times (-1,9)$$
$$J = (-19,1) \times (-37,2) \times 17,4 \times (-43,7) \times (-51,2)$$

Exercice 5 :

1. En 1985, l'Italienne Angela Bandini plongeait à -53 m. Mais en 1989, en plongeant deux fois plus profond, elle devint la première femme à dépasser les 100 m de profondeur.
   Quelle profondeur avait-elle atteint ?
2. Depuis, de nouveaux records ont été battus. Le 18 août 2001, le français Loïc Leferme est descendu $2,9$ fois plus bas qu'Angela Bandini en 1985.
   Quelle profondeur a-t-il atteint ?

Contrôle n°1

4^e 20 Septembre 2006

Exercice 1 :

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$A = -42 - (7-20) \times 2$ $B = 3 \times 12 - 10 \times (-2)$

$C = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-1)$ $D = \left[36 \div (-9) + 2\right] \times 5 - 2$

$E = (-14) \div (-7) + (-3) \div 5$ $F = \left[8 \times (-5) + 8\right] \div 4$

$G = \left(-4 \times 5 + 2\right) \div \left((-10) \div (-5) + 7\right)$ $H = 11 + 2 \times \left[(-3) + (-7) \times 3\right]$

$P = \dfrac{5 + 2(3 - 2 \times 8)}{-28 \div 4}$ $Q = \dfrac{-8 - 7 \times 3 - 1}{-5 \times 2}$

Exercice 2 :

Calcule les expressions données en utilisant les valeurs $a = -11$; $b = 5$; $c = -2$.

$L = a - bc$ $M = (a-b)c$ $N = 2a - (3b + 5c)$

Exercice 3 :

1. (a) Jérémy a multiplié la somme de -7 et de 3 par -6. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $-7 + 3 \times (-6)$ $(-7+3) \times (-6)$ $(3-7) \times (-6)$

   (b) Jérémy a ensuite multiplié la somme de -8 et de 3 par 6. Quel nombre Jérémy a-t-il calculé ?
2. (a) Eva a ajouté 6 au produit de -5 par 4. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $-5 + 4 \times 6$ $((-5) \times 4) + 6$ $4 \times (-5) + 6$

   (b) Eva a ensuite fait la somme du produit de -6 par 4 et de 5. Quel nombre Eva a-t-elle calculé ?

Exercice 4 :

Donne le signe des 2 produits suivants. Justifie la réponse.

$$I = 3,1 \times 4,2 \times (-1,2) \times (-1,3) \times 4,7 \times (-1,9)$$
$$J = (-19,1) \times (-37,2) \times 17,4 \times (-43,7) \times (-51,2)$$

Exercice 5 :

1. En 1985, l'Italienne Angela Bandini plongeait à -53 m. Mais en 1989, en plongeant deux fois plus profond, elle devint la première femme à dépasser les 100 m de profondeur.
   Quelle profondeur avait-elle atteint ?
2. Depuis, de nouveaux records ont été battus. Le 18 août 2001, le français Loïc Leferme est descendu $2,9$ fois plus bas qu'Angela Bandini en 1985.
   Quelle profondeur a-t-il atteint ?

Contrôle n°2

4e 5 Octobre 2006

Nom: **Prénom:**

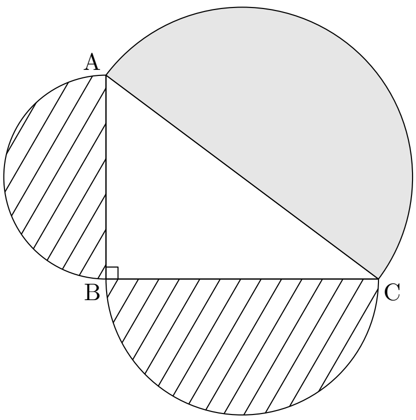
Exercice 1 :

1. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 35\,cm$ et $EF = 12\,cm$.
   Calcule la longueur DF.
2. Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 7,4\,cm$ et $BC = 6,5\,cm$.
   Calcule un arrondi au mm de la longueur AC.

Exercice 2 :

1. IJK est un triangle tel que $IJ = 2,04\,cm$; $IK = 5,96\,cm$; $JK = 5,6\,cm$.
   Est-ce que le triangle IJK est rectangle ?
2. RST est un triangle tel que $RS = 76\,cm$; $ST = 76,2\,cm$; $RT = 3,9\,cm$.
   Est-ce que le triangle RST est rectangle. ?

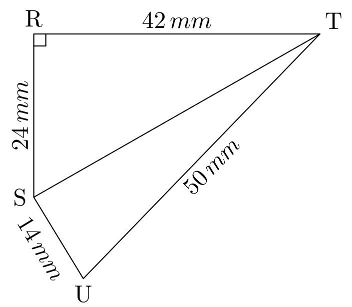
Exercice 3 :



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 4,8\,cm$ et $AC = 8\,cm$.

1. Calcule la longueur BC.
2. Montre que la somme des aires hachurées est égale à l'aire grisée.
3. En posant $AB = a$, $AC = b$ et $BC = c$, démontre que le résultat obtenu à la question 2 est vrai dans le cas général.

Exercice 4 :



1. Construis en vraie grandeur la figure ci-contre.
2. Le triangle STU semble rectangle. L'est-il vraiment ? Justifie la réponse.

Exercice 5 :

Effectue les calculs suivants :

1. $A = (-3) + (-7) \times 9$
2. $B = -6 \times (3 - 7)$
3. $C = 18 - [-3 \times 7 + 3]$

Barème possible :
Exercice 1 : 4 pts ; Exercice 2 : 4 pts ; Exercice 3 : 5 pts ; Exercice 4 : 4 pts ; Exercice 5 : 3 pts

Contrôle n°3

4e — 9 Novembre 2006

Nom: **Prénom:**

Exercice 1 :

Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = (x+6)^2$ $B = -4(x-2) - 7(2x+2)$ $C = -3a + (4-a)$

$D = (x+3) \times (x-6)$ $E = (3-x)(x-1)$ $F = 2x + 3(4x-2)$

$G = (8+x) - (3-x)$ $H = (2x-3)(3x+2) + 7x^2 - 2x + 3$ $I = (3x^2-5) - (1+x^2)$

Exercice 2 :

On considère un rectangle $ABCD$ de largeur $2y+1$ et de longueur $7y+2$, y désignant un nombre supérieur à 4.

1. (a) Faire une figure propre.
   (b) Calculer, en fonction de y, l'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle $ABCD$.
2. On augmente de $y-3$ la longueur et de $y-4$ la largeur de ce rectangle. On obtient un nouveau rectangle $AEFG$.
   (a) Compléter la figure.
   (b) Calculer, en fonction de y, l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle $AEFG$.
3. Exprimer, en fonction de y, la différence d'aire entre ces deux rectangles.
4. Calculer la différence d'aire des rectangles $ABCD$ et $AEFG$ pour $y = 5$.

Exercice 3 :

ABC est un triangle rectangle en A ; x désigne un nombre positif et $AC = x - 7$ et $AB = 15 - x$.

1. Montrer que $x \geqslant 7$.
2. Montrer que $x \leqslant 15$.
3. Exprimer l'aire du triangle rectangle en fonction de x.
4. Déterminer l'aire du triangle ABC lorsque $x = 9$.

Exercice 4 :

Soit l'expression $E = (-3+2x)(5x-2) + (25x^2-4) - 3(2-5x)$.

1. Développer et réduire E.
2. Calculer la valeur exacte de E lorsque :
   (a) $x = 0$,
   (b) $x = -\dfrac{1}{3}$.

Contrôle n°4

4^{e} 20 Novembre 2006

Exercice 1 :

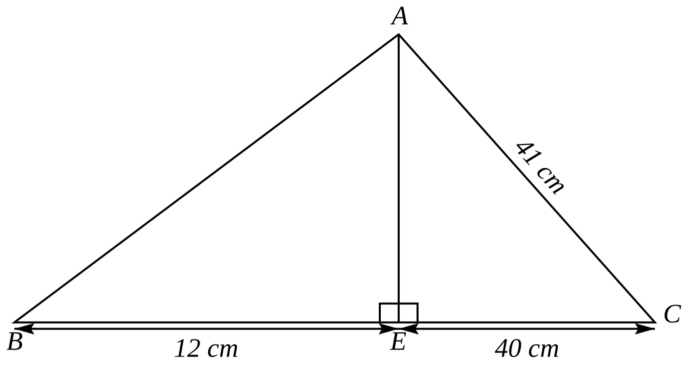
Développer puis réduire les expressions suivantes :

$A = (3x + 1)(x - 2)$
$B = (3 - x)(x - 1)$
$C = 2x + 3(5x - 2)$
$D = (2x + 3)(3x + 2) + 7x^2 - 2x + 3$

Exercice 2 :

EFG est un triangle, O est le milieu de $[EF]$. On a $EF = 8\,cm$, $EG = 6\,cm$ et $OG = 4\,cm$.
Calculer FG.

Exercice 3 :



La figure n'est pas dessinée à l'échelle.
1. Calculer AE.
2. Calculer BA.
3. Est-ce que le triangle BAC est rectangle ?

Exercice 4 :

Soit MNP un triangle tel que $MN = 4,8\,cm$, $NP = 6\,cm$. MNP est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre K, milieu de $[NP]$.

1. Faire une figure.
2. Est-ce que le triangle MNP est rectangle ? Justifier.
3. Calculer MK.

Exercice 5 :

Soit deux droites (AB) et (d) perpendiculaires en C. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour diamètre $[CB]$ et D est un point d'intersection de la droite (d) et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Construire la figure avec $AB = 8\,cm$ et $AC = 3\,cm$.
2. Le cercle $\mathcal{C}'$ et le segment $[BD]$ se coupent en E. Montrer que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (CE) et à la droite (AD).
3. Déduire que les droites (AD) et (CE) sont parallèles.

Contrôle n°5

4e — 5 Decembre 2006

Exercice 1 :

Calculer et donner les résultats sous forme de fractions simplifiées le plus possible :

$A = \dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{15} \times 3$

$B = 8 + 2 \div \dfrac{12}{-5}$

$C = \left(2 + \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{10}\right) \times \left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{5}\right)$

$D = \dfrac{(-2) \times 7 \times (-63) \times 10 \times (-8)}{49 \times 15 \times (-88)}$

$E = \dfrac{\dfrac{7}{4} - \dfrac{5}{3}}{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6}}$

$F = \dfrac{3}{10} - \left(\dfrac{4}{5} \times 3 + \dfrac{7}{2}\right)$

$G = \dfrac{\dfrac{1}{6} - \dfrac{11}{15}}{5}$

$H = \left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{3}{14}\right) \times \left(5 - \dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 2 :

On donne $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{-3}{7}$ et $c = \dfrac{-5}{4}$. Calculer I et J.

$I = a \times (b + c) \qquad J = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$

Exercice 3 :

Les $\dfrac{4}{5}$ des élèves d'une classe ont participé à une excursion ; les $\dfrac{2}{3}$ des élèves partis sont des filles.

1. Quelle fraction de la classe représentent les filles qui sont parties en excursion ?
2. Il y a 30 élèves dans la classe. Combien de filles ont participé à l'excursion ?

Exercice 4 :

4 personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1re personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\dfrac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Quelle est la fraction du trésor que représente la part de la 4epersonne ?
2. Déduis-en que le trésor contenait 540 pièces d'or.
3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

Exercice 5 :

Développer, puis réduire les expressions suivantes :

1. $K = (2x + 7)(x - 3)$
2. $L = 8(x - 5) + (x - 4)(3x + 2)$
3. $M = 7 + 3(x + 2)$
4. $N = (x + 8)^2 - 3(x + 1)$

Barême possible : Ex 1 : 8 pts, Ex 2 : 2 pts, Ex 3 : 2 pts, Ex 4 : 4 pts, Ex 5 : 4 pts

Contrôle commun n°1

4e 2007

La qualité et la précision de la rédaction ainsi que la propreté de la copie seront prises en compte dans l'évaluation. Calculatrice autorisée

Activités numériques : 12 points

Exercice 1 :

Calculer les expressions suivantes. On fera apparaître toutes les étapes de calcul.

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \quad B = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{15} \quad C = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \div \frac{4}{3} \quad D = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 2 :

1. Développer et réduire les expressions suivantes

$$E = (x+3) \times (x+2) \qquad F = (2x-1)^2$$
$$G = 1 + (x+3) \times (2x+4) \qquad H = x + 4 - (x-1) \times (x+1)$$

2. Calculer la valeur de E pour $x = 1$ et celle de F pour $x = \frac{1}{2}$.

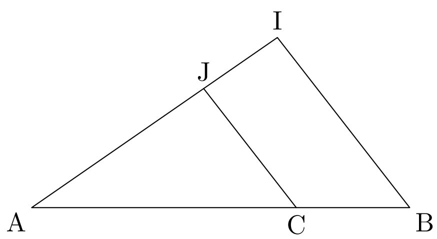
Exercice 3 :

Calculer les expressions suivantes avec $a = -2$, $b = -3$ et $c = 4$.

$$I = 2a - 3b - 5c \qquad J = \frac{5a - c}{b - c}$$

Activités géométriques : 14 points

Exercice 1 :



Sur la figure ci-contre, on a $AB = 7$ m ; $AC = 4,9$ m et $IB = 3$ m. Les droites (JC) et (IB) sont parallèles.
Démontrer que le triangle JCB est isocèle.

Exercice 2 :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de diamètre $[AM]$ tel que $AM = 12\,cm$. N est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $AN = 8\,cm$. La droite (d_1) est la perpendiculaire à la droite (AN) passant par O : elle coupe la droite (AN) en C.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (OC) et (MN) sont parallèles.
3. En déduire la position du point C sur le segment $[AN]$.
4. Calculer MN.

Exercice 3 :

1. FGH est un triangle tel que $FG = 3,91\,cm$, $GH = 5,21\,cm$ et $FH = 6,514\,cm$. Est-ce que le triangle est rectangle ? Si oui, tracer son cercle sirconscrit.
2. IJK est un triangle tel que $IJ = 3,63\,cm$, $IK = 4,84\,cm$ et $JK = 6,05\,cm$. Est-ce que le triangle est rectangle ? Si oui, tracer son cercle sirconscrit.

Problèmes :

10 points

Exercice 1 :

4 personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1^{re} personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\dfrac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Quelle est la fraction du trésor que représente la part de la 4^{e}personne ?
2. En déduire que le trésor contenait 540 pièces d'or.
3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

Exercice 2 :

Un groupe d'amis collectionne des cartes de téléphone. Stéphane en a x. Céline en a deux fois plus que Stéphane. Jérôme en a 5 de moins que Stéphane. Pierre en a deux de plus que Stéphane. Léa en a trois fois plus que Jérôme. Amélie en a deux fois plus que Céline.

1. Ecrire, en fonction de x, le nombre total de cartes possédées par le groupe d'amis (on pourra faire un tableau avec pour 1^{re} colonne les noms et pour la 2^{e} le nombre de cartes).
2. Si Stéphane a 10 cartes, quel est le nombre de cartes possédées par le groupe d'amis.

Barême possible : Numérique : Ex1 : 4 pts ; Ex2 : 6 pts ; Ex3 : 2 pts ; Géométrique : Ex1 : 3 pts ; Ex2 : 7 pts ; Ex3 : 4 pts ; Problèmes : Ex1 : 5 pts ; Ex2 : 5 pts

Aide à la correction du contrôle commun n°1

Activités numériques : 12 points

Exercice 1 :

Calculs basiques sur les fractions, voir les règles dans le cahier de cours.

Exercice 2 :

pts)

1. 2 difficultés :
   $F = (2x - 1) \times (2x - 1)$
   $H = x + 4 - (x^2 - 1 \times x + 1 \times x - 1 \times 1)$: Penser à conserver les parenthèses situées après le signe $-$, réduire l'expression entre parenthèses puis utiliser les règles de signe.
2. Utiliser les expressions non réduites, car si on fait une erreur en développant, on a faux...

Exercice 3 :

Calculer les expressions suivantes avec $a = -2$, $b = -3$ et $c = 4$.

$$I = 2 \times (-2) - 3 \times (-3) - 5 \times 4 \qquad J = \frac{5 \times (-2) - 4}{-3 - 4}$$

Activités géométriques : 14 points

Exercice 1 :

On utilise l'égalité des 3 rapports pour calculer JC. On calcule $CB = AB - AC$. On obtient $JC = CB$.

Exercice 2 :

1.
2. (a) On commence par montrer que AMN est rectangle le N (triangle inscrit dans un cercle...).
   (b) Les droites (CO) et (MN) sont perpendiculaires à la droite (AN)...
3. Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle....
4. Théorème de Pythagore, on a montré dans la question 1. que le triangle est rectangle, ATTENTION l'hypoténuse est $[AM]$ et non $[MN]$.....

Exercice 3 :

1. Calculs séparés (voir cours...) différents, contraposée du théorème de Pythagore.
2. Calculs séparés (voir cours...) égaux, réciproque du théorème de Pythagore. Pour le tracer, le milieu de l'hypoténuse suffit.

Problèmes : 10 points

Exercice 1 :

Exercice déjà traité lors du contrôle n°5 (5 Décembre 2006) et corrigé en classe....

Exercice 2 :

1. S : x, C : $2 \times x$, J : $x - 5$, P : $x + 2$, L : $3 \times (x - 5)$, A : $2 \times (2 \times x)$
   La somme est $12x - 18$
2. $10 \times 12 - 18 = 102$.

Contrôle n°7

4^{e} 27 Fevrier 2007

Exercice 1 :

Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

$$A = 5^2 \times 5^3 \qquad B = \frac{7^4}{7^2} \qquad C = \frac{2^3 \times 2}{2^5} \qquad D = \frac{3^2 \times 27}{81^2}$$

Exercice 2 :

1. Donner l'écriture décimale de

$$4,05 \times 10^4 \qquad\qquad 10,02 \times 10^{-3}$$

2. Donner l'écriture scientifique de

$$12,45 \qquad\qquad 0,0234$$

3. Écrire les nombres suivants sous forme scientifique.

$$A = 2,5 \times 10^2 \times 4 \times 10^5 \qquad B = \frac{21 \times 10^3}{0,7 \times 10^{-7}}$$

Exercice 3 :

Effectuer les calculs suivants en détaillant les étapes intermédiaires.

$$E = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-5}}{1,2 \times 10^2} \qquad F = (10^3)^{-3} \times 10^9 \qquad G = 5^4 \times 10^{-7} \times 2^4$$

$$H = \frac{2^7 \times 2^{-3}}{2^{-3}} \qquad I = \frac{10^7 \times (10^{-4})^2}{(10^{-4})^{-2}} \qquad J = \frac{49^3}{7^6}$$

Exercice 4 :

1. Les feuilles de papier vendues dans le commerce en Europe ont un format normalisé tel que le format A_4 ait exactement pour aire $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ m^2. Une ramette de papier contient 500 feuilles au format A_4. Quelle surface totale de papier en m^2 cela représente-t-il ?
2. En une année scolaire, le collège utilise pour ses photocopies, 580 ramettes de papier. Quelle surface totale de papier en m^2 cela représente-t-il ?
3. Le papier utilisé pèse 80 g par m^2. Quel poids de papier cela représente-t-il en kg ?

Barême possible : Ex 1 : 4 pts, Ex 2 : 6 pts, Ex 3 : 6 pts, Ex 4 : 4 pts

Contrôle n°8

4^e 6 Mars 2007

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $7x + 3 = 8$
2. $-8x + 7 = 4x - 3$
3. $3x + 4 = 9(x - 2)$
4. $\dfrac{3}{5}x + 7 = 17$
5. $3(x - 1) + 6 = 4x - (x - 4)$

Exercice 2 :

Parmi les nombres 2 et -1, indiquer dans chaque cas s'ils sont, ou non, solutions des équations suivantes :

1. $4x + 8 = 8(x + 1) - 8$
2. $x^2 - x = 2$

Exercice 3 :

Traduis chacune des phrases suivantes par une égalité. (On ne demande pas de trouver la valeur manquante.)

1. Un triangle équilatéral mesure x cm de côtés. Son périmètre est 18 cm.
2. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = x$ cm et $AC = 6$ cm. Son aire est 18 cm^2.
3. Un rectangle a une largeur qui mesure ℓ cm et une longueur qui mesure 2 cm de plus que sa largeur. Son périmètre est 25 cm.
4. J'ai acheté 3 livres et 4 cahiers pour un montant de 15 €. Le prix d'un cahier est moins cher de 2 € que le prix d'un livre.
5. J'ai x ans. Dans 3 ans, j'aurai le double de l'âge que j'ai maintenant.
6. J'ai 40 pièces au total. x pièces valent 1 €, les autres valent 2 €. Je possède 65 €.

Exercice 4 :

La recette d'un match de football est de 101101€ pour 11219 spectateurs payants.
Les spectateurs avaient le choix entre deux tarifs : 7€ et 15€.
Combien y avait-il de places à 7€ et 15€ ?

Barême possible : Ex 1 : 5 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 6 pts, Ex 4 : 5 pts

Contrôle n°9

4^{e} 22 Mars 2007

Exercice 1 :

Sur la route, lorsqu'un évènement imprévu survient, le conducteur réagit avec un temps de retard d'environ 1 seconde et la voiture parcourt encore une certaine distance qui dépend de la vitesse à laquelle roule le véhicule.
Le tableau ci-dessous indique différents résultats de relevés effectués par La Gendarmerie Nationale.

Vitesse en km.h^{-1}	50	70	100
Distance parcourue pendant le temps de réaction	14	19,6	28

1. Ce tableau correspond-il à une situation de proportionnalité ?
2. Quelle est la distance parcourue pendant le temps de réaction si l'on roule à 90 km.h^{-1} ? Et à 130 km.h^{-1} ?
3. À quelle vitesse roule-t-on si la distance de réaction est 30,8 m ?
4. Faire un graphique représentant cette situation.

Exercice 2 :

Un motocycliste et un cycliste partent à la même heure, du même endroit et sur la même route. Le motocycliste a parcouru 80 km en 1 h 20 min et le cycliste a parcouru 35 km en 1 h 10 min.

1. Quelle est la vitesse moyenne du motocycliste et du cycliste sur ce parcours ?
2. Quelle distance ont parcouru le motocycliste et le cycliste en 1 h 45 min ?
3. La distance totale de leur trajet est de 190 km. Au 65^{e} km, le motocycliste crève, répare et au moment de repartir s'aperçoit qu'il a été rattrapé par le cycliste. Combien de temps a duré la réparation du motocycliste ?

Exercice 3 :

Il a été demandé aux familles de deux villages voisins S et T de répondre à la question suivante :« Êtes-vous favorable à l'aménagement d'une piste cyclable entre les deux villages ? »

1/ (a) Dans le village S, 60% des 135 familles consultées ont répondu « oui ».
Combien de familles, dans ce village, sont favorables à ce projet ?

(b) Dans le village T, il y a 182 réponses favorables sur les 416 familles consultées.
Quel est le pourcentage de « oui » pour le village T ?

2/ La décision d'aménager la piste cyclable ne peut être prise qu'avec l'accord de la majorité des familles de l'ensemble des deux villages. La piste cyclable sera-t-elle réalisée ?

Exercice 4 :

Pendant ses vacances au Japon, Isabelle a acheté un guide touristique 2 100 yens.« Ce guide me revient à 18,9 € », a-t-elle calculé. Elle souhaite rapporter à sa sœur un magnifique kimono dont le prix affiché est 5 670 yens.
Quel est le prix en euros du kimono ?

Exercice 5 :

ABC est un triangle rectangle en C tel que $AB = 10$ cm et $\widehat{ABC} = 50^{\circ}$.
Calcule les longueurs BC et AC. (On donnera les valeurs arrondies au millimètre.)

Barême possible : Ex 1 : 5,5 pts, Ex 2 : 5,5 pts, Ex 3 : 4 pts, Ex 4 : 2 pts, Ex 5 : 3 pts

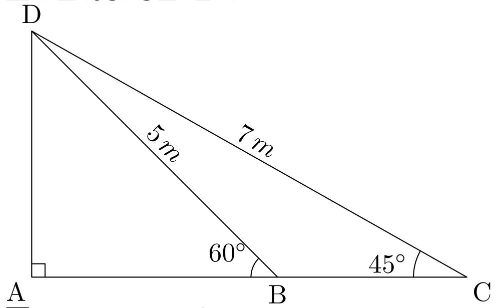
Contrôle n°10

4e 27 Mars 2007

Exercice 1 :

1. Construis un triangle RST rectangle en S tel que $RS = 4\,cm$ et $RT = 8\,cm$.
2. Calcule la longueur ST.
3. Détermine les angles de ce triangle rectangle.

Exercice 2 :



A l'aide de la figure ci-contre, calcule la longueur BC.

Exercice 3 :

Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10$ cm, on place un point C sur le cercle tel que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 50°.

1. Montre que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule les longueurs BC et AC. (On donnera les valeurs arrondies au millimètre.)

Exercice 4 :

Soit un triangle ABC tel que $AB = 7,8$ cm ; $AC = 7,2$ cm et $BC = 3$ cm.

1. Faire une figure à main levée qui sera complétée au fur et à mesure.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. On donnera la réponse à un degré près.
4. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $AD = 5,85$ cm. Le cercle de diamètre $[AD]$ recoupe le segment $[AC]$ en E.
   Quelle est la nature du triangle ADE ? (on ne veut pas de justification, juste une conjecture)
5. Démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
6. Calculer la longueur du segment $[DE]$ et celle du segment $[AE]$.

Barême possible : Ex 1 : 3,5 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 4,5 pts, Ex 4 : 8 pts

Devoirs maisons

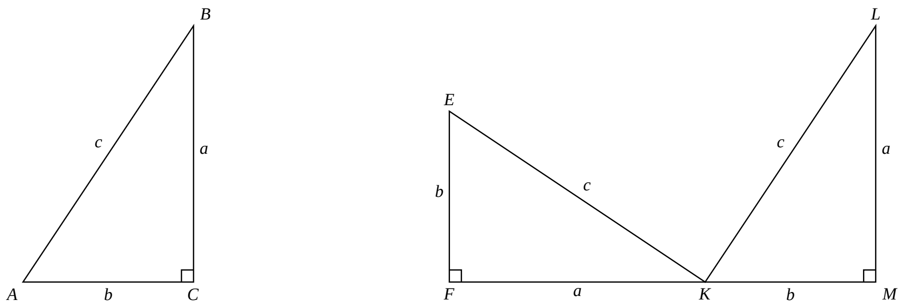
Sommaire

Devoir maison n° 1

4^{e} Pour le 28 septembre

Exercice 1 : Démonstration du théorème de Pythagore

Cette démonstration est due à J.-A.Garsfield, 20^{e}président des États-Unis d'Amérique.

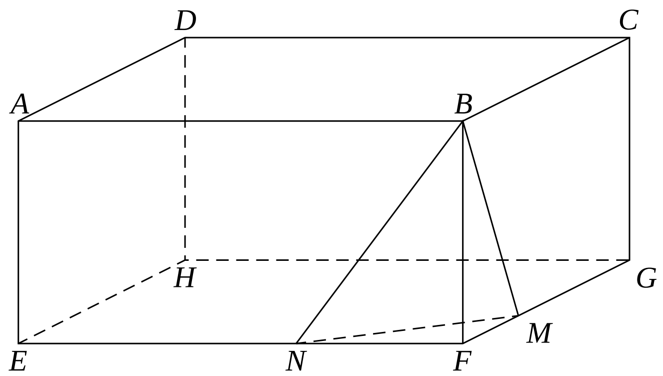


La figure de droite est composée de 2 triangles EFK et KLM, identiques au triangle ABC rectangle en C de telle sorte que les points F, K et M soient alignés.

1. Démontrer que $\widehat{EKL}$ est un angle droit.
2. Écrire en fonction de a, b et c l'aire des triangles EFK, KLM et EKL.
3. EFML est un trapèze de bases [EF] et [LM]. Calculer l'aire du trapèze de 2 façons différentes.
4. Conclure.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on donnera uniquement les valeurs **exactes**.



$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. On donne :

$FE = 12\,cm$ $FG = 9\,cm$

$FB = 3\,cm$ $FN = 4\,cm$

$FM = 3\,cm$

1. Construis la face $EFGH$ en vraie grandeur.
2. Construis un patron de ce parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
3. Calcule la longueur MN.
4. Calcule l'aire du triangle FMN.
5. Calcule la longueur EG puis déduis-en la longueur EC.

Exercice 1 : Démonstration du théorème de Pythagore

1. $\widehat{EKF} = \widehat{KLM} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{KEL} = \widehat{LKM} = \widehat{BAC}$ car les triangles ABC, EFK et KLM sont identiques.
   Donc $\widehat{EKF} + \widehat{LKM} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$.
   $\widehat{FKM} = \widehat{FKE} + \widehat{EKL} = \widehat{LKM} = 180^\circ$ car F, K et M sont alignés.
   Or $\widehat{EKF} + \widehat{LKM} = 90^\circ$, donc $\widehat{EKL} = 90^\circ$.
2. $\mathcal{A}_{EFK} = \mathcal{A}_{KLM} = \dfrac{ab}{2}$ et $\mathcal{A}_{EKL} = \dfrac{c^2}{2}$.
3. $\mathcal{A}_{EFML} = \dfrac{(a+b)\times(a+b)}{2} = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{2}$ et $\mathcal{A}_{EFML} = \mathcal{A}_{EFK} + \mathcal{A}_{EKL} + \mathcal{A}_{KLM} = \dfrac{ab}{2} + \dfrac{ab}{2} + \dfrac{c^2}{2}$.
4. Donc $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2} = \dfrac{2ab}{2} + \dfrac{c^2}{2}$ donc $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$, donc $a^2+b^2=c^2$.

Exercice 2 :

1.
2.
3. Le triangle FNM est rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore, on a $MN^2 = FN^2 + FM^2$.
   $MN^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc $MN = \sqrt{25} = 5\,cm$.
4. $\mathcal{A}_{FMN} = \dfrac{FM \times FN}{2} = \dfrac{4\times 3}{2} = 6\,cm^2$.
5. Le triangle EFG est rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore, on a $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
   $EG^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, donc $EG = \sqrt{225} = 15\,cm$.
   Le triangle EGC est rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore, on a $EC^2 = EG^2 + GC^2$.
   $EC^2 = 15^2 + 3^2 = 225 + 9 = 234$, donc $EC = \sqrt{234}\,cm$.

Exercice 1 : Démonstration du théorème de Pythagore

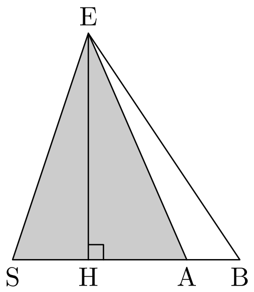
1. $\widehat{EKF} = \widehat{KLM} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{KEL} = \widehat{LKM} = \widehat{BAC}$ car les triangles ABC, EFK et KLM sont identiques.
   Donc $\widehat{EKF} + \widehat{LKM} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$.
   $\widehat{FKM} = \widehat{FKE} + \widehat{EKL} = \widehat{LKM} = 180^\circ$ car F, K et M sont alignés.
   Or $\widehat{EKF} + \widehat{LKM} = 90^\circ$, donc $\widehat{EKL} = 90^\circ$.
2. $\mathcal{A}_{EFK} = \mathcal{A}_{KLM} = \dfrac{ab}{2}$ et $\mathcal{A}_{EKL} = \dfrac{c^2}{2}$.
3. $\mathcal{A}_{EFML} = \dfrac{(a+b)\times(a+b)}{2} = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{2}$ et $\mathcal{A}_{EFML} = \mathcal{A}_{EFK} + \mathcal{A}_{EKL} + \mathcal{A}_{KLM} = \dfrac{ab}{2} + \dfrac{ab}{2} + \dfrac{c^2}{2}$.
4. Donc $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2} = \dfrac{2ab}{2} + \dfrac{c^2}{2}$ donc $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$, donc $a^2+b^2=c^2$.

Exercice 2 :

1.
2.
3. Le triangle FNM est rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore, on a $MN^2 = FN^2 + FM^2$.
   $MN^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc $MN = \sqrt{25} = 5\,cm$.
4. $\mathcal{A}_{FMN} = \dfrac{FM \times FN}{2} = \dfrac{4\times 3}{2} = 6\,cm^2$.
5. Le triangle EFG est rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore, on a $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
   $EG^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, donc $EG = \sqrt{225} = 15\,cm$.
   Le triangle EGC est rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore, on a $EC^2 = EG^2 + GC^2$.
   $EC^2 = 15^2 + 3^2 = 225 + 9 = 234$, donc $EC = \sqrt{234}\,cm$.

Démonstration du théorème de l'égalité des 3 rapports

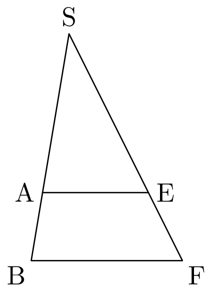
Préliminaires



Soit un triangle SBE. Le point A est sur la droite (SB). H est le pied de la hauteur issue de E dans le triangle SBE.

1. Justifier que $[EH]$ est aussi la hauteur issue de E dans le triangle SAE.
2. Utiliser la hauteur EH pour écrire les expressions des aires des triangles SBE et SAE.
3. Écrire le rapport $\dfrac{\text{Aire } SAE}{\text{Aire } SBE}$ et le simplifier. Quelle égalité obtient-on ?
4. Recopier et compléter :
   Donnée : SAE et SBE sont deux triangles de même ....
   Conclusion : le rapport des aires des triangles SAE et SBE est .....
   ....

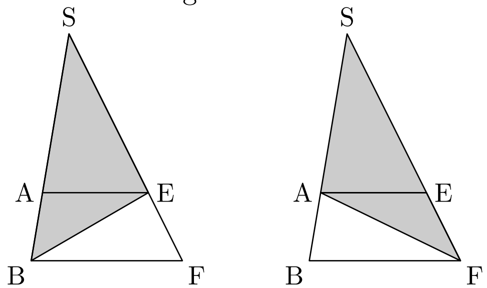
Première partie



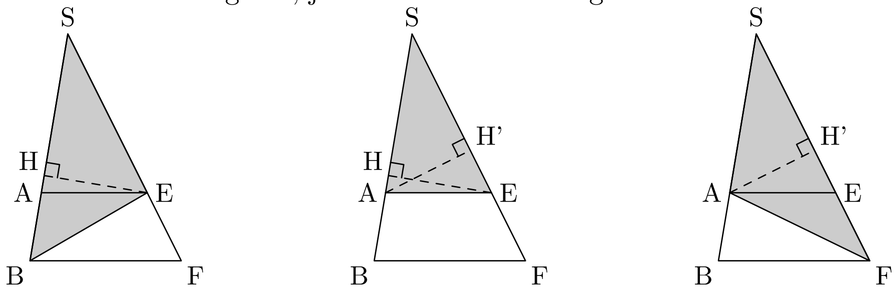
SBF est un triangle. Le point A est sur le côté $[SB]$. E est un point du côté $[SF]$ tel que la droite (AE) est parallèle à la droite (BF).

L'objectif de cette partie est de montrer que $\dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SE}{SF}$.

1. En s'aidant des figures, justifier chacune des égalités suivantes :
   (a) Aire BEF = Aire ABF ;
   (b) Aire SBE = Aire SAF ;
   (c) $\dfrac{\text{Aire } SAE}{\text{Aire } SBE} = \dfrac{\text{Aire } SAE}{\text{Aire } SAF}$.



2. En s'aidant des figures, justifier chacune des égalités suivantes :



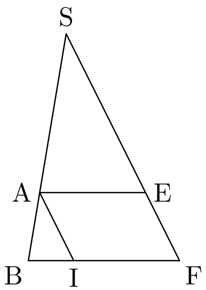
   (a) $\dfrac{\text{Aire } SAE}{\text{Aire } SBE} = \dfrac{SA}{SB}$;
   (b) $\dfrac{\text{Aire } SAE}{\text{Aire } SAF} = \dfrac{SE}{SF}$;
   (c) $\dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SE}{SF}$.

Deuxième partie

L'objectif de cette partie est de montrer que $\dfrac{SA}{SB} = \dfrac{AE}{BF}$.

On complète la figure avec le point I sur le segment $[BF]$ tel que la droite (AI) est parallèle à la droite (SF).

1. En s'aidant de la démarche précédente, que peut-on en déduire pour les rapports $\dfrac{BA}{BS}$ et $\dfrac{BI}{BF}$?
2. (a) Justifier que le quadrilatère $AEFI$ est un parallélogramme.
   (b) En déduire que $IF = AE$.
3. Justifier les égalités suivantes :
   (a) $\dfrac{BS}{BS} = \dfrac{BF}{BF}$;
   (b) $\dfrac{BS}{BS} - \dfrac{BA}{BS} = \dfrac{BF}{BF} - \dfrac{BI}{BF}$;
   (c) $\dfrac{AS}{BS} = \dfrac{IF}{BF}$;
   (d) $\dfrac{SA}{SB} = \dfrac{AE}{BF}$.



Conclusion

Que peut-on dire des trois rapports $\dfrac{SA}{SB}$, $\dfrac{SE}{SF}$ et $\dfrac{AE}{BF}$?

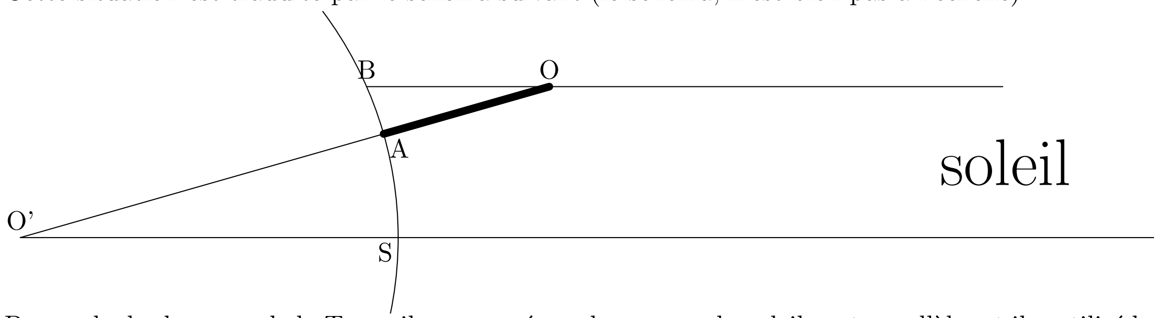
Devoir maison : calcul du rayon de la Terre selon Eratosthène

En 204 av.J.-C., Eratosthène, mathématicien et astronome grec, réussit à calculer le périmètre de la Terre à partir de 2 observations :

• Un certain jour dans l'année, il remarque que le soleil éclaire le fond des puits dans la ville égyptienne de Syène, c'est-à-dire que les rayons sont verticaux.

• Ce même jour, un an plus tard, à Alexandrie, située à 800 km de Syène, une tour de 25 m de haut fait une ombre de 3,1 m.

Cette situation est traduite par le schéma suivant (le schéma, n'est bien pas à l'échelle) :



Pour calculer le rayon de la Terre, il a supposé que les rayons du soleil sont parallèles et il a utilisé la notion de cosinus.

1. Calculer l'angle $\widehat{BOA}$. (On assimilera l'arc $\widehat{AB}$ à un segment et OAB à un triangle rectangle en A.)
2. Démontrer que $\widehat{BOA} = \widehat{AO'S}$. (Penser aux droites parallèles et à une leçon de 5[e]...)
3. La longueur d'un arc et l'angle qui le forme sont proportionnels, recopier et compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Angle en degrés (arrondi à 0,01 près).		360
Longueur de l'arc en km.	800	

4. On connaît maintenant le périmètre de la Terre, calculer le rayon de la Terre.

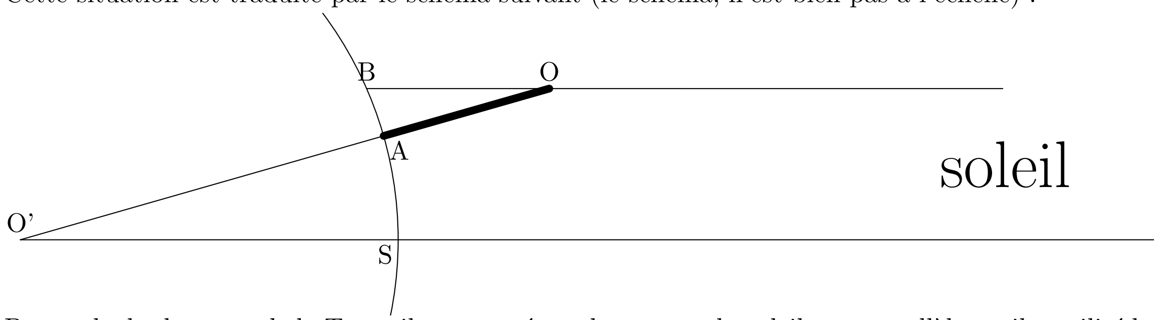
Devoir maison : calcul du rayon de la Terre selon Eratosthène

En 204 av.J.-C., Eratosthène, mathématicien et astronome grec, réussit à calculer le périmètre de la Terre à partir de 2 observations :

• Un certain jour dans l'année, il remarque que le soleil éclaire le fond des puits dans la ville égyptienne de Syène, c'est-à-dire que les rayons sont verticaux.

• Ce même jour, un an plus tard, à Alexandrie, située à 800 km de Syène, une tour de 25 m de haut fait une ombre de 3,1 m.

Cette situation est traduite par le schéma suivant (le schéma, n'est bien pas à l'échelle) :



Pour calculer le rayon de la Terre, il a supposé que les rayons du soleil sont parallèles et il a utilisé la notion de cosinus.

1. Calculer l'angle $\widehat{BOA}$. (On assimilera l'arc $\widehat{AB}$ à un segment et OAB à un triangle rectangle en A.)
2. Démontrer que $\widehat{BOA} = \widehat{AO'S}$. (Penser aux droites parallèles et à une leçon de 5[e]...)
3. La longueur d'un arc et l'angle qui le forme sont proportionnels, recopier et compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Angle en degrés (arrondi à 0,01 près).		360
Longueur de l'arc en km.	800	

4. On connaît maintenant le périmètre de la Terre, calculer le rayon de la Terre.

1. Le triangle AOB est rectangle en A.
   D'après le théorème de Pythagore, on a :
   $OB^2 = OA^2 + AB^2$
   $OB^2 = 25^2 + 3,1^2$
   $OB^2 = 625 + 9,61 = 634,61$
   $OB = \sqrt{634,61}$
   Le triangle AOB est rectangle en A.
   $\cos \widehat{BOA} = \dfrac{OA}{BO} = \dfrac{25}{\sqrt{634,61}}$
   $\widehat{BOA} = \cos^{-1}\left(\dfrac{25}{\sqrt{634,61}}\right) \approx 7,07^\circ$
2. Les droites (BO) et $(O'S)$ sont parallèles. Les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{AO'S}$ sont alternes internes donc $\widehat{BOA} = \widehat{AO'S}$.
3.

Angle en degrés.	7,07	360
Longueur de l'arc en km.	800	L

   $L = \dfrac{360 \times 800}{7,07} \approx 40736\text{km}.$
4. $L = 2 \times \pi \times r$
   $r = \dfrac{L}{2 \times \pi} \approx 6483\text{km}.$

1. Le triangle AOB est rectangle en A.
   D'après le théorème de Pythagore, on a :
   $OB^2 = OA^2 + AB^2$
   $OB^2 = 25^2 + 3,1^2$
   $OB^2 = 625 + 9,61 = 634,61$
   $OB = \sqrt{634,61}$
   Le triangle AOB est rectangle en A.
   $\cos \widehat{BOA} = \dfrac{OA}{BO} = \dfrac{25}{\sqrt{634,61}}$
   $\widehat{BOA} = \cos^{-1}\left(\dfrac{25}{\sqrt{634,61}}\right) \approx 7,07^\circ$
2. Les droites (BO) et $(O'S)$ sont parallèles. Les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{AO'S}$ sont alternes internes donc $\widehat{BOA} = \widehat{AO'S}$.
3.

Angle en degrés.	7,07	360
Longueur de l'arc en km.	800	L

   $L = \dfrac{360 \times 800}{7,07} \approx 40736\text{km}.$
4. $L = 2 \times \pi \times r$
   $r = \dfrac{L}{2 \times \pi} \approx 6483\text{km}.$

1. Le triangle AOB est rectangle en A.
   D'après le théorème de Pythagore, on a :
   $OB^2 = OA^2 + AB^2$
   $OB^2 = 25^2 + 3,1^2$
   $OB^2 = 625 + 9,61 = 634,61$
   $OB = \sqrt{634,61}$
   Le triangle AOB est rectangle en A.
   $\cos \widehat{BOA} = \dfrac{OA}{BO} = \dfrac{25}{\sqrt{634,61}}$
   $\widehat{BOA} = \cos^{-1}\left(\dfrac{25}{\sqrt{634,61}}\right) \approx 7,07^\circ$
2. Les droites (BO) et $(O'S)$ sont parallèles. Les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{AO'S}$ sont alternes internes donc $\widehat{BOA} = \widehat{AO'S}$.
3.

Angle en degrés.	7,07	360
Longueur de l'arc en km.	800	L

   $L = \dfrac{360 \times 800}{7,07} \approx 40736\text{km}.$
4. $L = 2 \times \pi \times r$
   $r = \dfrac{L}{2 \times \pi} \approx 6483\text{km}.$

Devoir maison : Centre de gravité d'un triangle

Le but de ce devoir est de montrer que dans un triangle ABC de centre de gravité G, on a $AG = \frac{2}{3}AH$, $BG = \frac{2}{3}BI$ et $CG = \frac{2}{3}CJ$ avec H, I et J les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On ne démontrera dans le devoir que la relation $AG = \frac{2}{3}AH$.

1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 10\,cm$, $AC = 11\,cm$ et $BC = 12\,cm$.
2. Tracer les médianes issues de A, B et C, leurs point d'intersection est G. Elles coupent respectivement $[BC]$ en H, $[AC]$ en I et $[AB]$ en J.
3. Placer K milieu de $[BG]$, L le milieu de $[AG]$ et M milieu de $[CG]$.
4. (a) Montrer que les droites (JL) et (GB) sont parallèles.
   (b) Montrer que les droites (MH) et (GB) sont parallèles.
   (c) Montrer que les droites (MH) et (JL) sont parallèles.
5. (a) Montrer que les droites (JH) et (AC) sont parallèles.
   (b) Montrer que les droites (LM) et (AC) sont parallèles.
   (c) Montrer que les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
6. Montrer que $JLMH$ est un parallélogramme.
7. Montrer que G est le milieu de $[JM]$ et de $[LH]$.
8. Conclure.

Devoir maison : Centre de gravité d'un triangle

Le but de ce devoir est de montrer que dans un triangle ABC de centre de gravité G, on a $AG = \frac{2}{3}AH$, $BG = \frac{2}{3}BI$ et $CG = \frac{2}{3}CJ$ avec H, I et J les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On ne démontrera dans le devoir que la relation $AG = \frac{2}{3}AH$.

1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 10\,cm$, $AC = 11\,cm$ et $BC = 12\,cm$.
2. Tracer les médianes issues de A, B et C, leurs point d'intersection est G. Elles coupent respectivement $[BC]$ en H, $[AC]$ en I et $[AB]$ en J.
3. Placer K milieu de $[BG]$, L le milieu de $[AG]$ et M milieu de $[CG]$.
4. (a) Montrer que les droites (JL) et (GB) sont parallèles.
   (b) Montrer que les droites (MH) et (GB) sont parallèles.
   (c) Montrer que les droites (MH) et (JL) sont parallèles.
5. (a) Montrer que les droites (JH) et (AC) sont parallèles.
   (b) Montrer que les droites (LM) et (AC) sont parallèles.
   (c) Montrer que les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
6. Montrer que $JLMH$ est un parallélogramme.
7. Montrer que G est le milieu de $[JM]$ et de $[LH]$.
8. Conclure.

1.
2.
3.
4. (a) L est le milieu de $[AG]$ et J est le milieu de $[AB]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (JL) et (GB) sont parallèles.

   (b) M est le milieu de $[CG]$ et H est le milieu de $[CB]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (MH) et (GB) sont parallèles.

   (c) Les droites (JL) et (GB) sont parallèles et les droites (MH) et (GB) sont parallèles.
   Si 2 droites sont parallèles à une même 3^{e}alors elles sont parallèles.
   Donc les droites (MH) et (JL) sont parallèles.
5. (a) J est le milieu de $[AB]$ et H est le milieu de $[BC]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (JH) et (AC) sont parallèles.

   (b) L est le milieu de $[AG]$ et M est le milieu de $[CG]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (LM) et (AC) sont parallèles.

   (c) Les droites (JH) et (AC) sont parallèles et les droites (LM) et (AC) sont parallèles.
   Si 2 droites sont parallèles à une même 3^{e}alors elles sont parallèles.
   Donc les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
6. Les droites (MH) et (JL) sont parallèles, les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
   Si un quadrilatère a ses 4 côtés opposés parallèles 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.
   Donc $JLMH$ est un parallélogramme.
7. $JLMH$ est un parallélogramme.
   Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leurs milieux.
   Donc G est le milieu de $[JM]$ et de $[LH]$.
8. $AL = LG = GH$ donc $AG = \dfrac{2}{3}AH$.

1.
2.
3.
4. (a) L est le milieu de $[AG]$ et J est le milieu de $[AB]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (JL) et (GB) sont parallèles.

   (b) M est le milieu de $[CG]$ et H est le milieu de $[CB]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (MH) et (GB) sont parallèles.

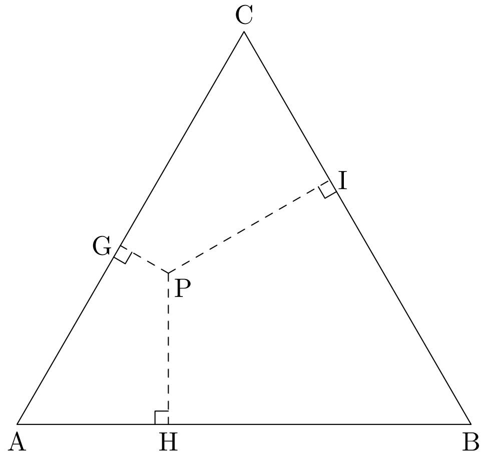
   (c) Les droites (JL) et (GB) sont parallèles et les droites (MH) et (GB) sont parallèles.
   Si 2 droites sont parallèles à une même 3^{e}alors elles sont parallèles.
   Donc les droites (MH) et (JL) sont parallèles.
5. (a) J est le milieu de $[AB]$ et H est le milieu de $[BC]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (JH) et (AC) sont parallèles.

   (b) L est le milieu de $[AG]$ et M est le milieu de $[CG]$.
   Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle au 3^{e}côté du triangle.
   Donc les droites (LM) et (AC) sont parallèles.

   (c) Les droites (JH) et (AC) sont parallèles et les droites (LM) et (AC) sont parallèles.
   Si 2 droites sont parallèles à une même 3^{e}alors elles sont parallèles.
   Donc les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
6. Les droites (MH) et (JL) sont parallèles, les droites (JH) et (LM) sont parallèles.
   Si un quadrilatère a ses 4 côtés opposés parallèles 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.
   Donc $JLMH$ est un parallélogramme.
7. $JLMH$ est un parallélogramme.
   Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leurs milieux.
   Donc G est le milieu de $[JM]$ et de $[LH]$.
8. $AL = LG = GH$ donc $AG = \dfrac{2}{3}AH$.

Devoir maison : Distances

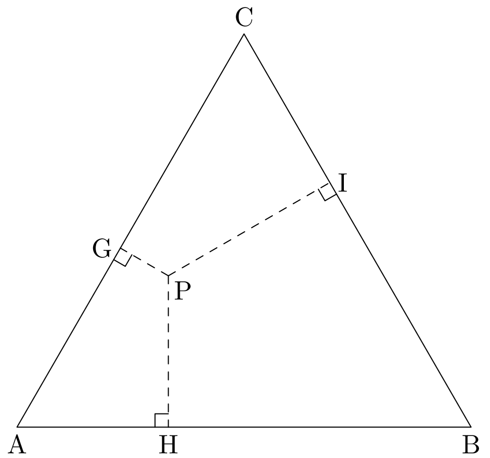
Le but de cet exercice est de montrer que dans un triangle équilatéral de côté c, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés du triangle est indépendante de la position de P et seulement dépendante de la longueur c. Dans cet exercice, on notera $AB = AC = BC = c$.



1. Exprimer l'aire du triangle APC en fonction de c et de PG.
2. Exprimer l'aire du triangle APB en fonction de c et de PH.
3. Exprimer l'aire du triangle BPC en fonction de c et de PI.
4. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de c, de PG, de PH et de PI.
5. Montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$.
6. À partir des 2 questions précédentes, montrer que $PH + PI + PG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times c$.

Devoir maison : Distances

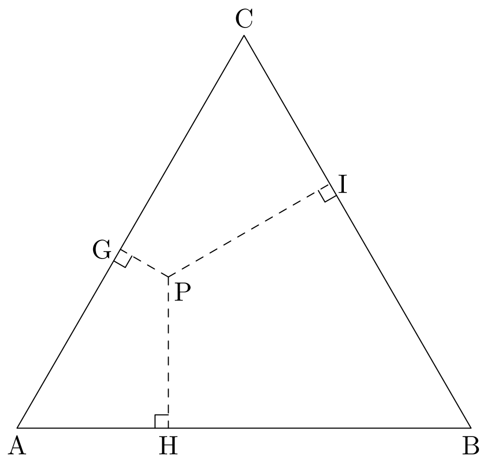
Le but de cet exercice est de montrer que dans un triangle équilatéral de côté c, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés du triangle est indépendante de la position de P et seulement dépendante de la longueur c. Dans cet exercice, on notera $AB = AC = BC = c$.



1. Exprimer l'aire du triangle APC en fonction de c et de PG.
2. Exprimer l'aire du triangle APB en fonction de c et de PH.
3. Exprimer l'aire du triangle BPC en fonction de c et de PI.
4. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de c, de PG, de PH et de PI.
5. Montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$.
6. À partir des 2 questions précédentes, montrer que $PH + PI + PG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times c$.

Devoir maison : Distances

Le but de cet exercice est de montrer que dans un triangle équilatéral de côté c, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés du triangle est indépendante de la position de P et seulement dépendante de la longueur c. Dans cet exercice, on notera $AB = AC = BC = c$.



1. Exprimer l'aire du triangle APC en fonction de c et de PG.
2. Exprimer l'aire du triangle APB en fonction de c et de PH.
3. Exprimer l'aire du triangle BPC en fonction de c et de PI.
4. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de c, de PG, de PH et de PI.
5. Montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$.
6. À partir des 2 questions précédentes, montrer que $PH + PI + PG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times c$.

Devoir maison : Théorème de Varignon et extensions

Introduction

Pierre Varignon (1654 ; 1722), mathématicien et physicien français, laisse quelques découvertes scientifiques remarquables. Il est l'inventeur du manomètre (appareil qui mesure la pression), étudie la statique et la mécanique élémentaire et découvre la théorie des moments.
Le théorème de Varignon dont l'énoncé est très simple mène à une conclusion étonnante :
En joignant les milieux d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme.
On va démontrer ce théorème simplement. Et étendre l'étude pour déterminer les conditions qu'il faut pour que le parallélogramme soit un rectangle, un losange, un carré...

Première partie : Démonstration du théorème de Varignon

1. Tracer un quadrilatère quelconque (pas de figure particulière) $ABCD$ (faire une assez grande figure).
2. Placer les milieux E, F, G et H respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
3. Tracer le quadrilatère $EFGH$. Quelle semble être sa nature ?

1. (a) En considérant le triangle ABC, montrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.
   (b) En considérant le triangle ADC, montrer que les droites (AC) et (GH) sont parallèles.
   (c) Montrer que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.
2. (a) En considérant le triangle ABC, montrer que $EF = \dfrac{1}{2} \times AC$.
   (b) En considérant le triangle ADC, montrer que $HG = \dfrac{1}{2} \times AC$.
   (c) Montrer que $EF = GH$
   (a) A l'aide des questions précédentes, montrer que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Deuxième partie :

Dans cette partie, on pourra réutiliser les résultats de la première partie (droites parallèles, parallélogramme, etc...). On veut dans cette partie voir à quelle condition sur le quadrilatère $ABCD$ est-ce que $EFGH$ est un rectangle.

1. Tracer un rectangle $EFGH$ puis placer un point A, puis les points B, C et D tels que les points E, F, G et H soient les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ (même configuration que dans la première partie), coder la figure. Attention, les points A, B, C et D ne doivent pas être à l'intérieur du quadrilatère $EFGH$.
2. Comment semblent être les diagonales de $ABCD$?
3. On suppose que $EFGH$ est un rectangle. On va montrer que $ABCD$ est un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires.
   (a) Montrer que les droites (BD) et (EF) sont perpendiculaires (penser que les droites (BD) et (EH) sont parallèles).
   (b) Conclure que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires (penser que les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

   On vient de montrer que si $EFGH$ est rectangle alors $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires, mais est ce que si $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires alors $EFGH$ est un rectangle ?
4. On suppose que $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires.
   (a) Montrer que les droites (BD) et (EF) sont perpendiculaires (penser que les droites (AC) et (EF) sont parallèles).

(b) Montrer que les droites (EF) et (EH) sont perpendiculaires.

(c) Conclure.

On a donc montré dans cette partie que si $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires, alors $EFGH$ est un rectangle, et reciproquement.

Troisième partie :

Dans cette partie, on pourra réutiliser les résultats de la première partie (droites parallèles, parallélogramme, etc...).
On veut dans cette partie voir à quelle condition sur le quadrilatère $ABCD$ est-ce que le quadrilatère $EFGH$ est un losange.

1. Tracer un losange $EFGH$ puis placer un point A, puis les points B, C et D tels que les points E, F, G et H soient les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ (même configuration que dans la première partie), coder la figure. Attention, les points A, B, C et D ne doivent pas être à l'intérieur du quadrilatère $EFGH$.
2. Comment semblent être les diagonales de $ABCD$?
3. On suppose que $EFGH$ est un losange. On va montrer que $ABCD$ est un quadrilatère qui a ses diagonales de même mesure.

   (a) Montrer que $EH = \frac{1}{2} \times BD$.

   (b) Montrer que $EF = \frac{1}{2} \times AC$.

   (c) À partir des deux questions précédentes, montrer que $BD = AC$.

   On vient de montrer que si $EFGH$ est losange alors $ABCD$ a ses diagonales de même mesure, mais est ce que si $ABCD$ a ses diagonales de même mesure alors $EFGH$ est un losange ?
4. On suppose que $ABCD$ est un quadrilatère qui a ses diagonales de même mesure. On va montrer que $EFGH$ est un losange.

   (a) Montrer que $EH = \frac{1}{2} \times BD$.

   (b) Montrer que $EF = \frac{1}{2} \times AC$.

   (c) À partir des deux questions précédentes, montrer que $EH = EF$.

   (d) Conclure.

Quatrième partie :

Dans cette partie, on pourra réutiliser les résultats des trois premières parties (droites parallèles, parallélogramme, rectangles, losanges, etc...).
On veut dans cette partie voir à quelle condition sur le quadrilatère $ABCD$ est-ce que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

1. Tracer un carré $EFGH$ puis placer un point A, puis les points B, C et D tels que les points E, F, G et H soient les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ (même configuration que dans la première partie), coder la figure. Attention, les points A, B, C et D ne doivent pas être à l'intérieur du quadrilatère $EFGH$.
2. On sait qu'un carré est un rectangle et un losange à la fois. À partir des deux parties précédentes, quelles doivent être les conditions sur $ABCD$ pour que $EFGH$ soit un carré ?